TABLA DE CONTENIDO

Contenido

TABLA DE CONTENIDO **1**

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN A LAS ANUALIDADES **5**

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO 5
SIMBOLOGÍA 5
1.1 FLUJOS FINANCIEROS Y FLUJOS DE CAJA 6
1.2 PERIODICIDADES DE FLUJOS Y ANUALIDADES 7
1.3 CLASIFICACIÓN DE LAS ANUALIDADES 9
PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN 13
PROBLEMAS PROPUESTOS 14
RESUMEN DEL CAPÍTULO 15

CAPÍTULO 2 ANUALIDADES VENCIDAS **17**

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO 17
SIMBOLOGÍA 17
2.1 MONTO DE UNA ANUALIDAD SIMPLE VENCIDA 18
2.2 VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD SIMPLE VENCIDA 22
2.3 RENTAS UNIFORMES VENCIDAS 26
2.4 RENTA UNIFORME VENCIDA A PARTIR DE S 27
2.5 RENTA UNIFORME VENCIDA A PARTIR DE P 30
2.6 CÁLCULO DE N EN UNA ANUALIDAD VENCIDA 33
2.7 CÁLCULO DE I (TIR) EN UNA ANUALIDAD SIMPLE VENCIDA 38
2.8 FACTORES FINANCIEROS 40
2.9 MODELOS DE ANUALIDADES CON EXCEL 43
2.10 LISTADO DE FÓRMULAS 55
PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN 56
PROBLEMAS PROPUESTOS 57
RESUMEN DEL CAPÍTULO 62

CAPÍTULO 3 ANUALIDADES ANTICIPADAS **63**

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO 63
SIMBOLOGÍA 63
3.1 ANUALIDAD ANTICIPADA 64
3.2 MONTO DE UNA ANUALIDAD SIMPLE ANTICIPADA 66
3.3 VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD SIMPLE ANTICIPADA 68
3.4 RENTAS UNIFORMES ANTICIPADAS 70
3.5 RENTA UNIFORME ANTICIPADA A PARTIR DE S 71
3.6 RENTA UNIFORME ANTICIPADA A PARTIR DE P 73
3.7 CÁLCULO DE N EN UNA ANUALIDAD ANTICIPADA 74
3.8 CÁLCULO DE I (TIR) EN UNA ANUALIDAD ANTICIPADA 79
3.9 MODELOS DE ANUALIDADES ANTICIPADAS CON EXCEL 81
3.10 LISTADO DE FÓRMULAS 89
PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN 90
PROBLEMAS PROPUESTOS 91
RESUMEN DEL CAPÍTULO 94

CAPÍTULO 4 ANUALIDADES DIFERIDAS **95**

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO 95

SIMBOLOGÍA....95
4.1 ANUALIDAD SIMPLE DIFERIDA....96
4.2 MONTO DE UNA ANUALIDAD SIMPLE DIFERIDA....97
4.3 VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD SIMPLE DIFERIDA VENCIDA....98
4.4 VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD SIMPLE DIFERIDA ANTICIPADA....100
4.5 RENTA UNIFORME DIFERIDA A PARTIR DE S....101
4.6 RENTA UNIFORME DIFERIDA A PARTIR DE P....102
4.7 CÁLCULO DE K Y N EN UNA ANUALIDAD SIMPLE DIFERIDA....104
4.8 CÁLCULO DE I (TIR) EN UNA ANUALIDAD DIFERIDA....106
4.9 MODELOS DE ANUALIDADES DIFERIDAS CON EXCEL....108
4.10 LISTADO DE FÓRMULAS....118
PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN....119
PROBLEMAS PROPUESTOS....120
RESUMEN DEL CAPÍTULO....123

CAPÍTULO 5 ANUALIDADES GENERALES....125

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO....125
5.1 ANUALIDAD GENERAL....126
5.2 MONTO DE UNA ANUALIDAD GENERAL....128
5.3 VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD GENERAL....131
5.4 RENTAS DE UNA ANUALIDAD GENERAL....133
5.5 FACTORES DE DISTRIBUCIÓN Y AGRUPAMIENTO....136
5.6 CÁLCULO DE N E I (TIR) EN UNA ANUALIDAD GENERAL....139
5.7 MODELOS DE ANUALIDADES GENERALES CON EXCEL....140
PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN....154
PROBLEMAS PROPUESTOS....155
RESUMEN DEL CAPÍTULO....162

CAPÍTULO 6 GRADIENTES....163

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO....163
SIMBOLOGÍA....164
6.1 GRADIENTES....165
6.2 VALOR PRESENTE DE ANUALIDAD DE GRADIENTES UNIFORMES CONVENCIONALES....169
6.3 VALOR PRESENTE DE ANUALIDAD DE GRADIENTES UNIFORMES DESFASADOS....172
6.4 RENTA UNIFORME DE ANUALIDAD DE GRADIENTES UNIFORMES....173
6.5 VALOR FUTURO DE ANUALIDAD DE GRADIENTES UNIFORMES CONVENCIONALES Y DESFASADOS....175
6.6 VALOR PRESENTE DE ANUALIDAD CON RENTAS QUE VARÍAN EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA....178
6.7 VALOR FUTURO DE UNA ANUALIDAD CON RENTAS QUE VARÍAN EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA....182
6.8 GRADIENTES UNIFORMES VARIABLES ARITMÉTICAMENTE CADA M NÚMERO DE RENTAS....184
6.9 CUOTAS VARIABLES GEOMÉTRICAMENTE CADA M NÚMERO DE RENTAS....189
6.10 MODELOS DE ANUALIDADES DE GRADIENTES CON EXCEL....192
6.11 LISTADO DE FÓRMULAS....205
PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN....207
PROBLEMAS PROPUESTOS....208
RESUMEN DEL CAPÍTULO....214

CAPÍTULO 7 ANUALIDADES SIMPLES CON INTERÉS SIMPLE....215

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO....216
A. ANUALIDADES VENCIDAS....217
7.1 VALOR FUTURO O MONTO FINAL DE UNA ANUALIDAD VENCIDA....217
7.2 R UNIFORME DE UNA ANUALIDAD EN FUNCIÓN DE S....220
7.3 J DE UNA ANUALIDAD VENCIDA EN FUNCIÓN DE S....221
7.4 N EN UNA ANUALIDAD VENCIDA EN FUNCIÓN DE S....222
7.5 VALOR DE P DE UNA ANUALIDAD CON RENTAS UNIFORMES VENCIDAS....224
7.6 R UNIFORME EN FUNCIÓN DE P....225
7.7 J EN UNA ANUALIDAD VENCIDA EN FUNCIÓN DE P....226
7.8 N EN UNA ANUALIDAD VENCIDA EN FUNCIÓN DE P....228
B. ANUALIDADES ANTICIPADAS....230
7.9 VALOR FUTURO O MONTO FINAL DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA....230
7.10 RA UNIFORME DE UNA ANUALIDAD EN FUNCIÓN DE S....232

7.11 J DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA EN FUNCIÓN DE S 233
7.12 N DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA EN FUNCIÓN DE S 234
7.13 VALOR DE P EN UNA ANUALIDAD ANTICIPADA 236
7.14 RA UNIFORME DE UNA ANUALIDAD EN FUNCIÓN DE P 237
7.15 J DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA EN FUNCIÓN DE P 238
7.16 N EN UNA ANUALIDAD ANTICIPADA EN FUNCIÓN DE P 239
C. ANUALIDADES TRUNCAS 241
7.17 VALOR FUTURO O MONTO FINAL DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA TRUNCA 241
7.18 RA UNIFORME DE UNA ANUALIDAD TRUNCA EN FUNCIÓN DE S 244
7.19 J EN UNA ANUALIDAD ANTICIPADA TRUNCA EN FUNCIÓN DE S 245
7.20 N EN UNA ANUALIDAD ANTICIPADA TRUNCA EN FUNCIÓN DE S 246
7.21 VALOR DE P DE UNA ANUALIDAD ANTICIPADA TRUNCA 248
7.22 RA UNIFORME DE UNA ANUALIDAD TRUNCA EN FUNCIÓN DE P 250
7.23 J EN UNA ANUALIDAD ANTICIPADA TRUNCA EN FUNCIÓN DE P 251
7.24 N EN UNA ANUALIDAD ANTICIPADA TRUNCA EN FUNCIÓN DE P 252
7.25 MODELOS DE ANUALIDADES CON INTERÉS SIMPLE CON EXCEL 254
7.26 LISTADO DE FÓRMULAS 266
PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN 268
PROBLEMAS PROPUESTOS 269
RESUMEN DEL CAPÍTULO 274

CAPÍTULO 8 PERPETUIDADES 275

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO 275
8.1 PERPETUIDAD 276
8.2 MONTO DE UNA PERPETUIDAD 278
8.3 VALOR PRESENTE DE UNA PERPETUIDAD SIMPLE VENCIDA 279
8.4 VALOR PRESENTE DE UNA PERPETUIDAD SIMPLE ANTICIPADA 282
8.5 VALOR PRESENTE DE UNA PERPETUIDAD CUYAS RENTAS VENCIDAS CRECEN CON UNA TASA G (I > G) 283
8.6 VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD CUYAS RENTAS CRECEN CON UNA TASA G (I=G) Y ES POSIBLE DETERMINAR EL NÚMERO DE RENTAS 286
8.7 VALOR PRESENTE DE UNA PERPETUIDAD SIMPLE ANTICIPADA CUYA RENTA INICIAL ES DISTINTA DE LAS DEMÁS 287
8.8 VALOR PRESENTE DE UNA PERPETUIDAD SIMPLE DIFERIDA VENCIDA 288
8.9 VALOR PRESENTE DE UNA PERPETUIDAD SIMPLE DIFERIDA ANTICIPADA 289
8.10 VALOR PRESENTE DE UNA PERPETUIDAD SIMPLE CUYAS RENTAS VENCIDAS SE PAGAN CADA CIERTO NÚMERO DE PERIODOS DE TASA 290
8.11 RENTA PERPETUA VENCIDA 292
8.12 RENTA PERPETUA ANTICIPADA 293
8.13 CÁLCULO DE I (TIR) EN UNA PERPETUIDAD 294
8.14 COSTO CAPITALIZADO 295
8.15 COSTO CAPITALIZADO CUANDO F ES IGUAL A W 297
8.16 MODELOS DE PERPETUIDADES CON EXCEL 298
8.17 LISTADO DE FÓRMULAS 304
PREGUNTAS DE AUTOEVALUACIÓN 305
PROBLEMAS PROPUESTOS 306
RESUMEN DEL CAPÍTULO 309

ÍNDICE TEMÁTICO 311

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN A LAS ANUALIDADES

En el presente capítulo se desarrolla el marco conceptual de las periodicidades de flujos de caja, denominadas convencionalmente anualidades, que sirve de base para el desarrollo de los siguientes capítulos del presente libro.

Objetivos del capítulo

Al terminar de estudiar este capítulo el estudiante estará capacitado para:

1.1 Definir los conceptos de flujo financiero y de flujo de caja.

1.2 Definir una anualidad e identificar sus principales elementos.

1.3 Clasificar las anualidades de acuerdo con algunas de las principales características de sus rentas, las tasas de interés y el horizonte temporal.

Simbología

Los símbolos que se utilizan en el presente capítulo son los siguientes:

H	Horizonte temporal.
R	Renta vencida.
Ra	Renta anticipada.
i	Tasa de interés efectiva.
j	Tasa de interés nominal.
n	En el caso de una anualidad simple es el número de períodos de tasa en su horizonte temporal.
n_c	En el caso de una anualidad simple es el número de rentas o cuotas de dicha anualidad.
k	En una anualidad simple diferida es el número de períodos de renta existentes en su subhorizonte temporal diferido.
N°	Ordinal de una cuota determinada en una anualidad. Así, para la primera cuota su ordinal será N° = 1; para la segunda será N° = 2 y así sucesivamente hasta la última cuota cuyo ordinal será N° = n_c.
M	Momento del tiempo designado con un número igual al número de períodos de tasa existentes desde el inicio del horizonte temporal hasta que se produce dicho momento. En virtud de esta definición, en cualquier anualidad simple el momento inicial es igual a 0 mientras que el momento final es igual a n.

1.1 Flujos financieros y flujos de caja

Flujo financiero

Un *flujo financiero* es un flujo de modificación (incremento o reducción) del stock de un activo financiero, de un pasivo o de patrimonio. Cualquier otro flujo que no se ajuste a la definición anterior se denomina *flujo no financiero*.

Ejemplo 1.1

La empresa Proveedores S.A. produce impresoras. Dicha empresa hace una venta a crédito de una impresora a la empresa Distribuidores S.A. Para la empresa Proveedores S.A.:

- Dicha operación origina a una reducción de su stock de impresoras las cuales son activos pero no financieros; por lo tanto, tal reducción es un flujo no financiero;
- El crédito referido implica un incremento del saldo de *cuentas por cobrar* (que es un activo financiero); por lo tanto, tal incremento es un flujo financiero.

Ejemplo 1.2

Con la información del ejemplo anterior, se tiene para la empresa Distribuidores S.A.:

- La operación origina a un incremento de su stock de impresoras, las cuales son activos pero no financieros; por lo tanto, tal incremento es un flujo no financiero;
- El crédito referido implica un incremento del saldo de cuentas por pagar (que es un activo financiero); por lo tanto, tal incremento es un flujo financiero.

Flujo de caja

Un flujo de caja es un flujo financiero que es al mismo tiempo o bien un *egreso de caja* o bien un *ingreso a caja*. Bajo la denominada **óptica de caja**, se tiene:

- los egreso de caja son flujos de signo negativo desde la perspectiva de quien incurre en dicho egreso, lo cual representa una salida de efectivo;
- los ingresos de caja son flujos de signo positivo desde la perspectiva del receptor de dicho ingreso, lo cual representa una entrada de efectivo.

Ejemplos de flujo de egreso de caja son:

- un flujo de depósito de efectivo que incrementa el principal de una cuenta, bajo la perspectiva del depositante tiene signo negativo, como el depósito inicial y los depósitos intermedios en una cuenta de ahorros;
- un flujo de inversión en efectivo, el cual desde la perspectiva del inversionista tiene signo negativo, como la inversión inicial de un proyecto de ampliación de la capacidad productiva de una empresa;
- un flujo de pago en efectivo el cual desde la perspectiva del pagador tiene signo negativo, como los pagos de intereses, de principal o de ambos que corresponden a un préstamo; el pago de los sueldos de los trabajadores, de pensiones de enseñanza, de pensiones de jubilación, de alquileres, por primas de seguros o de servicios de energía eléctrica, agua, etc.

Ejemplo de flujos de ingreso a caja son:

- un flujo de retiro en efectivo que reduce el monto de una cuenta, el cual desde la perspectiva del que retira tiene signo positivo, tal como el retiro de principal, el retiro de intereses o el retiro de intereses y principal de una cuenta de ahorros;
- un flujo de ingreso en efectivo por financiamiento recibido el cual desde el punto de vista del receptor del financiamiento tiene signo positivo, tal como el pago sea de intereses, de principal o de ambos conceptos correspondiente a un préstamo; el pago de pensiones de enseñanza, pensiones de jubilación, de alquileres, por primas de seguros, de servicios de energía eléctrica, de agua, etc.

1.2 Periodicidades de flujos y anualidades

Periodicidad de flujos

Una *periodicidad de flujos* es un conjunto de dos o más flujos, cada uno de los cuales se produce en un momento diferente de un horizonte temporal. Son ejemplos de periodicidades de flujos: los sueldos de los trabajadores, los pagos de alquileres, las depreciaciones, las amortizaciones, los pagos por primas de seguros, los pagos por servicios de energía eléctrica, agua, etc.

Para una periodicidad de flujo:

a. Se denomina *período interflujo* a la distancia temporal que existe entre los momentos en los cuales se producen dos flujos consecutivos;
b. Se denomina período de flujo, o simplemente período,
    - a cualquier período interflujo;
    - en el caso de que el primer flujo se produzca en un momento posterior al inicial del horizonte temporal, a la distancia temporal entre ambos momentos;
c. los períodos se denominan uniformes cuando todos ellos son iguales; se denominan no uniformes cuando no se cumple dicha condición;
d. si todos los flujos que la componen son financieros, la misma se denomina periodicidad de flujos financieros;

e. si todos los flujos que la componen son de caja, la misma se denomina periodicidad de flujos de caja.

Convenciones sobre el uso de los términos anualidad, perpetuidad, renta y cuota

En sentido estricto una *anualidad de flujos* es una periodicidad de flujos con períodos uniformes. Sin embargo, el término *anualidad* suele usarse en un sentido que no es estricto, y se aplica también a periodicidades con períodos no uniformes y en los cuales alguno(s) o todos sus períodos pueden ser distintos de un año.

Al tener en cuenta dicha terminología, en el presente libro, salvo indicación contraria se usarán las siguientes convenciones:

a. el término anualidad será usado para referirse a cualquier periodicidad de flujos de caja (independientemente de que sus períodos sean uniformes o no uniformes, anuales o no anuales) con un horizonte temporal finito;
b. el término perpetuidad será usado para referirse a cualquier periodicidad de flujos de caja con un horizonte temporal infinito.
c. os términos renta y cuota serán usados para referir a cualquier flujo de dicha periodicidad, el mismo que puede tener signo positivo (ingreso) o signo negativo (egreso);
d. los términos período de renta y período de cuota serán usados para referirse a la distancia temporal que existe entre el momento en que se produce una renta hasta que se produce la siguiente renta.

Atributos principales de una anualidad

Entre los principales atributos de una anualidad se tienen los siguientes:

- *Horizonte temporal* H, es el plazo de la anualidad que puede medirse en días, quincenas, meses, trimestres u otros períodos de tiempo uniformes o no uniformes. Si se conoce la fecha de inicio de una periodicidad, pero no puede estimarse su fin dado que el horizonte temporal tiende a infinito, entonces la anualidad toma el nombre de *perpetuidad*.
- *Momento*, es un instante del tiempo o de ocurrencia de algún evento que afecta a la anualidad (inicio, cobro, pago, vencimiento, cambio de tasa, etc.).
- *Renta* o *cuota* R, es un flujo de caja que puede ser uniforme (de un mismo importe que se repite varias veces en el horizonte temporal), o no uniforme o variable.
- *Número de períodos* n, es el número de períodos de renta consecutivos que conforman el horizonte temporal de la anualidad; en una anualidad con períodos uniformes es el número de períodos de tasa cuando el período de tasa coincide con el período de renta.
- *Número de cuotas* n_c, es el número de cuotas o de rentas que se realizan en el horizonte temporal de la anualidad.
- *Número de períodos diferidos* k, es el número de períodos de tiempo en el cual no se realiza ningún pago de renta.
- *El interés de una anualidad*, en el caso de que la misma genere intereses. A este respecto es preciso señalar que los intereses devengados no son rentas o cuotas de la anualidad pues no son flujos de caja; sin embargo, cualquier retiro de interés que incrementa el saldo de caja sí es una renta.

- *Tasa de interés*, es la tasa que devenga el stock de efectivo, las rentas o los saldos de caja durante el horizonte temporal. La tasa de interés puede ser explícita o implícita; la tasa de interés explícita puede ser fija o variable. Cuando la anualidad es a interés simple, la tasa de interés es una tasa nominal o tasa de interés simple j; cuando la anualidad es a interés compuesto, la tasa de interés es una tasa efectiva i.
- El *monto o valor futuro* S, es un importe que se compone de principal y de interés de todas las rentas de la anualidad. Sin embargo, es preciso señalar que los intereses devengados no serán considerados renta o cuotas de la anualidad en tanto no representen un ingreso a caja o un egreso de caja, es decir, en tanto no sean flujos de caja.
- El *valor presente*, es el importe que invertido en el presente a las mismas tasas de interés de la anualidad producirá el mismo valor futuro.

1.3 Clasificación de las anualidades

Existen muchos modos de clasificar las anualidades, un esquema de clasificación se presenta en la figura 1.1.

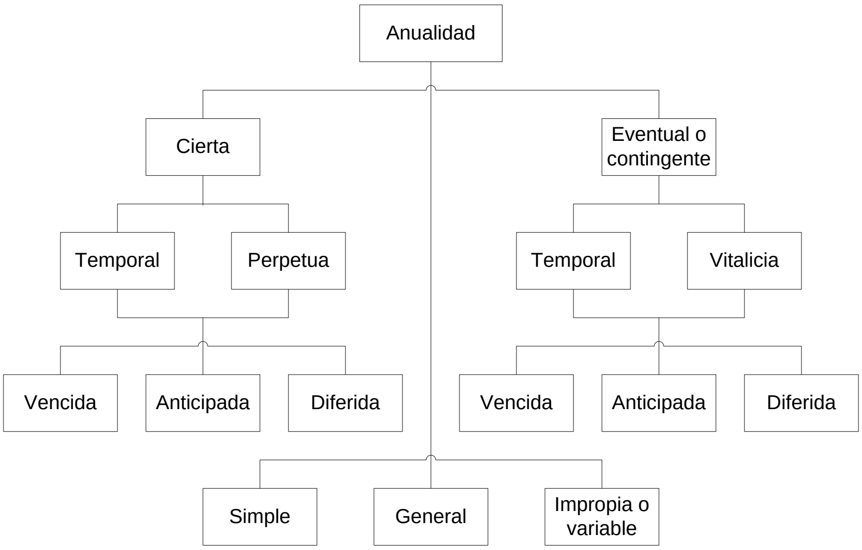


Figura 1.1. Clasificación de las anualidades.

Anualidades ciertas
Son aquellas cuyas condiciones se conocen de antemano (horizonte temporal con fecha de inicio y término, períodos de renta, etc.) y se establecen previamente, generalmente por contrato entre el deudor y el acreedor de la operación financiera que genera la anualidad. Estas anualidades de acuerdo con su duración pueden ser:

Temporales
Cuando el horizonte temporal de la anualidad es un plazo determinado. Por ejemplo, cuando se contrae un crédito a través de un *Leasing* u otra modalidad a un plazo específico.

Perpetuidades
Son anualidades en la que el fin del horizonte temporal no está determinado, por ejemplo: la emisión de bonos que en algunos países pagan una renta perpetua, las rentas que generan los pagos por peajes de autopistas, los importes por mantenimiento preventivo de carreteras, los costos de mantenimiento de puentes, represas, etc.

Anualidades simples
Una *anualidad simple* es un conjunto de dos o más rentas, que cumplen los siguientes requisitos:

- R, todas las cuotas, rentas o flujos de caja, son del mismo importe.
- i, la tasa de *interés* no varía durante el horizonte de la anualidad, y su período es el mismo que el período de la renta. Así, si la renta es diaria, la tasa de interés debe ser diaria, si la renta es semestral la tasa de interés debe ser semestral, etc. En caso de no ser así debe hallarse una tasa equivalente del período de renta.
- n, el *número* de períodos de tasa, está compuesto por períodos de tiempo que son iguales que el período de las rentas.

En conclusión, una anualidad es simple cuando:

- todos los importes de las rentas son iguales,
- todos los períodos de renta son iguales,
- el período de la tasa de interés es igual que el período de la renta,
- la tasa de interés no cambia durante el horizonte temporal de la anualidad.

Cuando se viola algunos de los requisitos anteriores, la anualidad deja de ser simple para convertirse en una anualidad general. En una anualidad simple el período de renta no es necesariamente un año, sino un plazo de tiempo uniforme, por ejemplo: días, quincenas, meses, trimestres, etc. Las anualidades simples pueden ser *vencidas*, *anticipadas*, *anticipadas truncas* y *diferidas*.

Anualidad simple vencida u ordinaria
Es aquella cuyas rentas R se producen únicamente al final del período de renta; en este caso el número de rentas n_c coincide con los momentos M; es decir: $n=n_c$. Por ejemplo en la figura 1.2 se observa que la renta 1 se produce en el momento 1, la renta 2 se produce en el momento 2 y así sucesivamente.

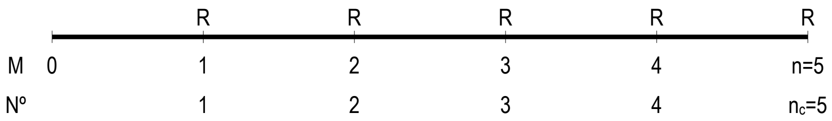


Figura 1.2. Anualidad simple vencida.

Anualidad simple anticipada o imposición
Es aquella cuyas rentas R_a se producen al inicio del período de renta, en este caso el número de la renta n_c no coincide con el número del momento M. En la figura 1.3 se observa que la renta anticipada 1 se produce en el momento 0, la renta anticipada 2 se produce en el momento 1, y así sucesivamente. En este caso, de manera similar al caso de las anualidades simples vencidas, el número de rentas coincide con el número de períodos de renta; es decir: $n=n_c$.

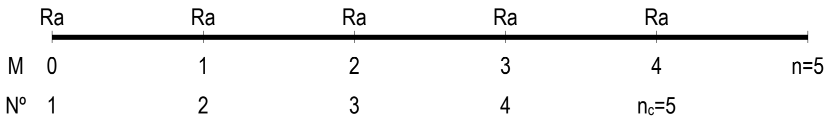


Figura 1.3. Anualidad simple anticipada.

Sin embargo para cada renta, el momento en que la misma se produce es menor en una unidad que el correspondiente número de renta representado con el símbolo N°.

Anualidad simple anticipada trunca
Es aquella en la cual:

- se produce una renta al inicio de cada período de renta, y además,
- se produce una renta al término del horizonte temporal.

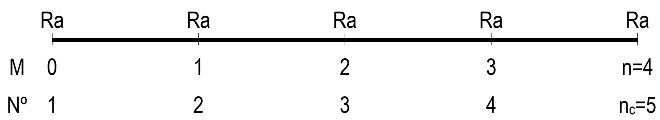


Figura 1.4. Anualidad simple anticipada trunca.

De manera análoga al caso de la anualidad simple anticipada, para cada renta, el momento en que la misma se produce es menor en una unidad que el correspondiente número de renta representado con el símbolo N°. Observe en la figura 1.4 que la renta anticipada 1 se produce en el momento 0, la renta anticipada 2 se produce en el momento 1, y así sucesivamente. Sin embargo, a diferencia de las anualidades simples vencidas y anticipadas, el número de rentas no coincide con el número de períodos de renta sino que se cumple:

$n = n_c – 1$

Las anualidades de este tipo son calificadas como *anticipadas truncas* porque en el mismo momento en que se produce la última cuota se termina el horizonte temporal, a diferencia de una anualidad anticipada en las cual luego de producirse la última cuota todavía se completa un período adicional.

Anualidad simple diferida
Una *anualidad simple diferida* es aquella cuyo horizonte temporal es la unión de dos subhorizontes temporales diferentes pero consecutivos, el primero en el cual no se paga ni principal ni el interés devengado, y el segundo que corresponde a una anualidad vencida o anticipada, tal que:

- todos los flujos de la anualidad se dan entre los momentos inicial y final del subhorizonte diferido,
- la anualidad tomada en relación con el subhorizonte diferido se configura como una *anualidad simple*,
- el período de la tasa de interés es igual al período interflujo.

El número de períodos de tasa que existe en el subhorizonte diferido es simbolizado k. Así, para un subhorizonte diferido es de 120 días, si los períodos interflujos son de 30 días, el período de tasa también será de 30 días y, por lo tanto, el valor de k será $\frac{120 \text{ días}}{30 \text{ días}} = 4$.

En una anualidad simple diferida vencida o anticipada, el horizonte temporal se compone de: k períodos diferidos (donde no se realizan pagos ni de principal ni de interés), y n_c periodos de renta; es decir $n = k + n_c$.

Las figuras 1.5 y 1.6 muestran los diagramas de las anualidades simples diferidas vencidas y anticipadas.

Figura 1.5. Anualidad simple vencida diferida (2 períodos de renta).

Figura 1.6. Anualidad simple anticipada diferida (2 períodos de renta).

Anualidades generales
Una anualidad es general cuando se viola uno o más requisitos de una anualidad simple. En una anualidad general:

- *R*, una o más rentas o flujos de caja, no son del mismo importe que las demás.
- *i*, el período de la tasa de interés no coincide con el período de renta, o si coincide es variable durante el horizonte de temporal de la anualidad.
- *n*, el número de rentas o número de períodos de tasa está compuesto por períodos de tiempo que no son iguales que el período de las rentas.

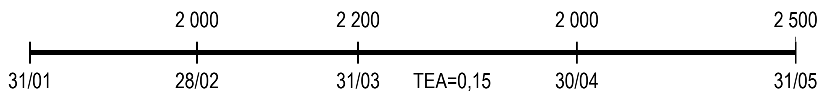


Figura 1.7. Diagrama de flujo de caja de una anualidad general.

La anualidad que se ilustra en la figura 1.7 es general porque:

- Los importes de las rentas son diferentes.
- La tasa de la anualidad es una tasa efectiva anual y no coincide con los períodos de renta.
- Los períodos de renta son diferentes y no necesariamente coinciden con el período de tasa.

Anualidades impropias o variables
Son anualidades cuyas rentas no son iguales. Estas pueden ser crecientes, decrecientes o experimentar variaciones que siguen un patrón uniforme o no durante el horizonte temporal de la anualidad.

Son ejemplos de estas anualidades aquellas que varían en:

- progresión aritmética,
- en progresión geométrica,
- cada cierto período de tiempo durante el horizonte temporal de la anualidad.

Anualidades eventuales o contingentes
Son aquellas cuya fecha de inicio o término dependen de algún suceso previsible, pero cuya fecha de realización no puede especificarse por estar en función de algún acontecimiento externo no previsible exactamente. Son ejemplos de anualidades eventuales los seguros de vida, en los cuales se conoce el importe de la renta pero su duración es incierta.

El desarrollo de estas anualidades corresponde al campo de las matemáticas actuariales, el cual demanda no sólo el conocimiento del interés compuesto sino también las probabilidades. Estas anualidades a su vez pueden ser:

Temporales

Es en esencia una anualidad vitalicia cuya diferencia con ella es que termina después de un determinado número de pagos, aun cuando el rentista continúe con vida.

Vitalicias

Son anualidades que tienen vigencia mientras dure la vida del rentista.

Las rentas de una anualidad pueden capitalizarse (monto de una anualidad), descontarse (valor presente de una anualidad) o llevarse por equivalencia financiera a cualquier momento de su respectivo horizonte temporal, si se aplica el principio de equivalencia financiera.

A partir de un stock de efectivo ubicado en el presente o en el futuro, es posible calcular el importe de su correspondiente flujo uniforme o renta uniforme.

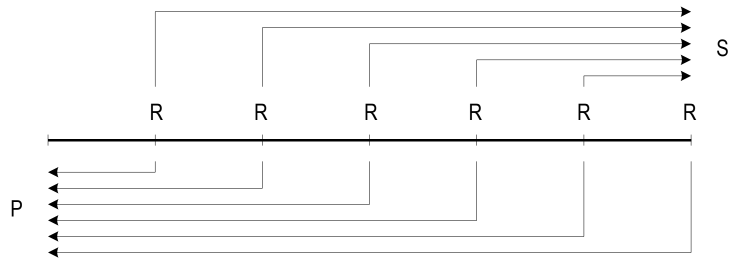


Figura 1.8. Rentas que se capitalizan hasta el final del horizonte temporal y que se descuentan hacia el inicio del horizonte temporal para formar el valor futuro y el valor presente de la anualidad.

Cálculo de anualidades cuando el período de tasa es diferente del período de renta

Cuando el período de la tasa de interés de la anualidad proporcionada como dato es diferente del período de la renta uniforme, entonces la anualidad no es simple, sino una anualidad general. En este caso debe convertirse la tasa en una tasa equivalente o en una tasa proporcional (según las tasas proporcionadas como datos sean efectivas o nominales); luego de esta operación se habrá convertido la anualidad general, en una anualidad simple y se aplicarán las fórmulas de las anualidades simples.

Preguntas de autoevaluación

1. ¿Qué es un flujo financiero y un flujo de caja?

2. ¿Qué es una anualidad? Dé tres ejemplos de anualidades.

3. ¿Cuáles son los principales elementos de una anualidad?

4. Comente cómo pueden clasificarse las anualidades.

5. ¿Cuáles son los requisitos para que una anualidad se considere como simple?

6. ¿Cuándo se dice que una anualidad es *cierta*, *simple* y *vencida*? Mencione 6 ejemplos en los cuales se aplican estas anualidades.

7. ¿Qué es una anualidad anticipada? Cite cinco ejemplos de anualidades anticipadas.

8. ¿Qué es una anualidad diferida? Mencione 3 ejemplos en los que se aplican anualidades diferidas.

9. ¿Qué es una anualidad general? Formule un problema en el cual se cumplen las condiciones de una anualidad general; dibuje su diagrama de tiempo valor.

10. ¿Qué es una anualidad impropia o variable?

11. ¿Qué es una anualidad eventual o contingente?

12. ¿Qué es una perpetuidad?, cite ejemplos en los cuales los flujos de caja son perpetuidades.

13. ¿Qué procedimiento debe seguirse cuando el período de la renta o del flujo de caja de una anualidad simple, no coincide con el período de tasa? Suponga que los flujos de caja se realizan cada 60 y la evaluación de los flujos se efectúa con una TEA de 0,12.

Problemas propuestos

1. *Elementos en una anualidad vencida*. Una empresa obtuvo del Banco Interamericano un préstamo de 100 000 unidades monetarias (um) que devenga una TEA (tasa efectiva anual) de 0,15. Este préstamo que se desembolsó el 1 de octubre de un año no bisiesto, debe amortizarse en el plazo de un año con cuotas uniformes de 8 981,44 um, que vencen cada 30 días.

   a. ¿Cuántos días tiene el período de renta?
   b. ¿Cuál es la tasa efectiva del período de renta?
   c. ¿Cuántos días tiene el horizonte temporal de la anualidad?
   d. ¿Cuál es la fecha de término de la anualidad simple vencida?

2. *Elementos en una anualidad anticipada*. Una empresa debe renovar el seguro anual (360 días) de sus maquinarias; el importe de este seguro asciende a 80 000 um y será financiado por la propia compañía aseguradora en un plazo anual con cuotas uniformes trimestrales anticipadas de 20 904,24 um. El financiamiento devenga una TEM (tasa efectiva mensual) de 0,01 y el plazo se debe iniciar el 11 de abril de un año no bisiesto.

   a. ¿Cuántos días tiene el período de renta?
   b. ¿Cuál es la tasa efectiva del período de renta?
   c. ¿Cuál es la fecha de vencimiento de la última cuota anticipada?
   d. ¿Cuál es la fecha de término de la anualidad anticipada?
   e. Si las respuestas de los acápites c. y d. no coinciden, explique el motivo de la discrepancia.

Resumen del capítulo

Un *flujo financiero* es un flujo de modificación (incremento o reducción) del stock de un activo financiero, de un pasivo o de patrimonio. Un *flujo de caja* es un flujo financiero que es al mismo tiempo o bien un *egreso de caja* o bien un *ingreso a caja*.

Una *anualidad* es un conjunto de dos o más *rentas* que se realizan en un determinado horizonte temporal finito. Una renta es un flujo de caja o flujo de efectivo que puede tener signo positivo (ingreso) o signo negativo (egreso). Aunque el término anualidad sugiere rentas de periodicidad anual, los períodos de renta pueden ser de cualquier período de tiempo uniforme o no.

Los principales elementos de una anualidad son: horizonte temporal H, momento M, renta R, número de rentas n, número de cuotas n_c, número de períodos diferidos k, tasa de interés, valor futuro, valor presente.

Las anualidades pueden ser ciertas y eventuales o contingentes.

Una *anualidad simple* cuando: todos los importes de las rentas son iguales, todos los períodos de renta son iguales, el período de la tasa de interés es igual que el período de la renta, la tasa de interés no cambia durante el horizonte temporal de la anualidad.

Una anualidad es cierta cuando se conocen de antemano los elementos que la constituyen (P, R, S, n, i). Es perpetua cuando la duración de las rentas es ilimitada. Ambas anualidades pueden ser a su vez: vencidas u ordinarias, anticipadas o imposiciones y diferidas, depende del inicio de realización de las rentas. Las rentas diferidas que se capitalizan al finalizar cada período de gracia (período durante el cual no se pagan principal ni intereses), pueden ser a su vez: vencidas o anticipadas.

Las anualidades eventuales o contingentes son aquéllas cuya fecha inicial o terminal dependen de algún suceso previsible pero cuya realización no puede determinarse con exactitud. Las anualidades eventuales pueden ser vitalicias cuando su duración depende de la vida del rentista, es temporal cuando termina después de un determinado número de pagos aun cuando el rentista continúe con vida.

En forma general, las anualidades pueden ser: simples, cuando las rentas coinciden con los períodos de interés; general cuando las rentas no coinciden con los períodos de interés; e impropias o variables cuando las rentas difieren unas de otras.

Capítulo 2

ANUALIDADES VENCIDAS

El objetivo general de este capítulo es estudiar las anualidades simples vencidas y los factores financieros que se generan cuando se convierte un stock de efectivo en flujos y viceversa.

Objetivos del capítulo

Al terminar de estudiar este capítulo el estudiante estará capacitado para:

2.1 Demostrar la fórmula del monto de una anualidad simple vencida y resolver problemas del monto de una anualidad.

2.2 Demostrar la fórmula del valor presente de una anualidad simple vencida y resolver problemas de valor actual.

2.3 Identificar las fórmulas que se utilizan para calcular una renta uniforme vencida, cuando se conoce un valor futuro y cuando se conoce un valor presente.

2.4 Calcular rentas uniformes vencidas equivalentes, a partir de un valor futuro.

2.5 Calcular rentas uniformes vencidas equivalentes, a partir de un valor presente.

2.6 Calcular el valor de n en una anualidad simple vencida, a partir de P y a partir de S. Interpretar n cuando su valor es no entero.

2.7 Calcular la tasa implícita de una anualidad simple vencida o tasa interna de retorno TIR.

2.8 Identificar seis factores financieros con los que se realizan transformaciones equivalentes, entre stocks y flujos; realizar operaciones con factores financieros.

2.9 Plantear modelos de anualidades en una hoja de Excel, que resuelven problemas de anualidades.

Simbología

Los nuevos símbolos que se utilizan en el presente capítulo son los siguientes:

FAS	Factor de actualización de la serie uniforme.
FC	Flujo de caja.
FCS	Factor de capitalización de la serie uniforme.
FDFA	Factor de depósito al fondo de amortización.
FRC	Factor de recuperación del capital.
FSA	Factor simple de actualización.
FSC	Factor simple de capitalización.
n	Número de períodos de tasa o el número de rentas en una anualidad simple.
P	Valor presente.
S	Valor futuro; monto de una anualidad.
TIR	Tasa interna de retorno.

2.1 Monto de una anualidad simple vencida

Una serie de rentas uniformes que constituyen una anualidad simple vencida pueden llevarse hacia el final del horizonte temporal de la anualidad y formar su respectivo *monto final* o *valor futuro*. Por ejemplo, si las rentas que se muestran en la figura 2.1 necesitan llevarse por equivalencia financiera al final del período 4, con la tasa i = 0,05, cada flujo de caja o renta puede *capitalizarse* hacia el momento 4 del siguiente modo:

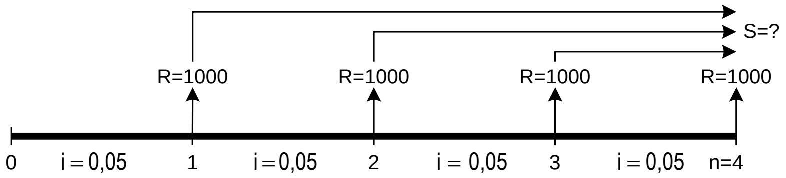


Figura 2.1. Diagrama de flujo de caja del monto de una anualidad simple vencida.

Renta 1	$1000 \times (1+0{,}05)^3$	= 1 157,63
Renta 2	$1000 \times (1+0{,}05)^2$	= 1 102,50
Renta 3	$1000 \times (1+0{,}05)^1$	= 1 050,00
Renta 4	$1000 \times (1+0{,}05)^0$	= 1 000,00
S	Valor futuro	= 4 310,13

El valor futuro de la anualidad de 4 310,13 um se obtuvo al capitalizar cada renta durante el número de períodos que median entre el momento de su ocurrencia y el final del horizonte temporal. La renta 1 se capitalizó 3 períodos, la renta 2 se capitalizó 2 períodos, la renta 3 se capitalizó 1 período y la renta 4 no fue necesario capitalizarla debido a que coincide con el final del horizonte temporal.

Demostración de la fórmula del monto de una anualidad simple vencida

En términos generales, dado una tasa efectiva i, las rentas R que constituyen una anualidad simple vencida pueden transformarse por equivalencia financiera en su respectivo valor futuro equivalente S.

Al tomar como fecha focal el final del horizonte temporal de la anualidad, puede deducirse la fórmula del valor futuro de una anualidad simple vencida, del siguiente modo:

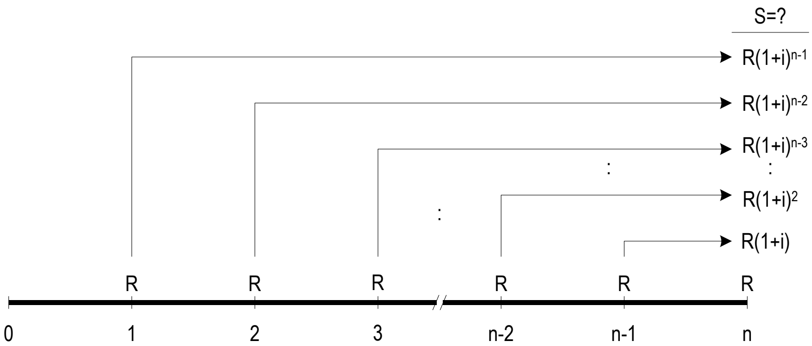


Figura 2.2. Anualidad simple vencida cuyas rentas uniformes se capitalizan hasta el final del horizonte temporal.

Cada flujo de caja R se capitaliza durante n períodos de renta: el primero durante n-1 períodos, el segundo durante n-2 períodos, el penúltimo durante un período y el último no devenga interés ya que su pago coincide con la fecha de término del plazo. El valor futuro de la anualidad es igual a la suma de los montos parciales de cada R, llevado al final del horizonte temporal:

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1} \quad (1)$$

$$S(1+i) = R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^n \quad (2)$$ Al multiplicar (1) por (1+i)

$$S(1+i) = R(1+i) + R(1+i)^2 + \cdots + R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^n \quad (3)$$ Al restar (1) de (2)

$$-S = -R - R(1+i) - R(1+i)^2 - \cdots - R(1+i)^{n-1} \quad (4)$$

$$S(1+i-1) = -R \qquad\qquad + R(1+i)^n \qquad (5)$$

$$Si = R(1+i)^n - R \qquad (6)$$

Al reagrupar y factorizar (6) se tiene:

$$\boxed{S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]} \qquad (2.1a)$$

La fórmula (2.1a) calcula el valor futuro de una anualidad simple vencida en la cual R, i y n son del mismo plazo.

Como el monto de una anualidad simple es la suma de los n términos de una sucesión geométrica creciente, como se observa en (1), la fórmula (2.1a) puede obtenerse con la fórmula de la suma de una progresión geométrica:

$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ Donde: $a_1 = R$ y $r = (1+i)$

$S = \frac{R[(1+i)^n-1]}{1+i-1}$ → $S = \frac{R[(1+i)^n-1]}{i}$

El factor de capitalización de la serie uniforme FCS

En la fórmula (2.1a) el término entre corchetes, es el Factor de Capitalización de la Serie uniforme (FCS), por lo tanto la fórmula (2.1a) se representa:

$$\boxed{S = R.FCS_{i;n}} \qquad (2.1b)$$

La fórmula (2.1b) se lee: "el FCS vencido a una tasa i por período durante n períodos de renta, transforma una serie uniforme de rentas R en un valor futuro S". El $FCS = \frac{(1+i)^n-1}{i}$ es el monto de una anualidad cuyas rentas uniformes simples vencidas son de 1 um.

Por ejemplo, el FCS=6,15201506 de la figura 2,3 es el monto de la anualidad cuya renta uniforme es 1 um; n=6 y la TEM es 0,01.

$FCS = \frac{(1+i)^n-1}{i}$ $FCS = \frac{(1+0{,}01)^6-1}{0{,}01} = 6{,}15201506$

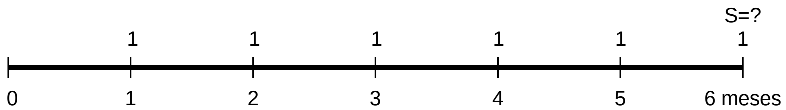


Figura 2.3. FCS que obtiene el monto de una anualidad simple vencida cuyas rentas son de un importe de 1 um.

Ejemplo 2.1
Calcule:

a. El FCS de una anualidad cuyas rentas uniformes mensuales vencidas son de 1 um; la TEM es 0,014 y el horizonte temporal es un año.
b. El monto de la anualidad si las rentas uniformes mensuales vencidas son de 1 500 um, y las demás variables son las mismas del acápite a.

Solución
Con los datos R=1; R=1 500; i=0,014; n=12 y con la fórmula del FCS, se tiene:

a. Monto de la anualidad con rentas de 1 um

$FCS = \frac{(1+i)^n-1}{i}$ $FCS = \frac{(1+0{,}014)^{12}-1}{0{,}014} = 12{,}96850921$

b. Monto de la anualidad con rentas de 1 500 um

$S = R.FCS_{i;n}$ $S = 1\,500\left[\frac{(1+0{,}014)^{12}-1}{0{,}014}\right]$

$S = 1\,500 \times 12{,}96850921 = 19\,452{,}76$

Ejemplo 2.2
Si un trabajador efectúa aportes anuales de 960 um a una Administradora de Fondos de Pensiones (AFP) durante sus últimos cinco años de actividad laboral, ¿qué monto acumulará en ese período si el fondo devenga una TEA de 0,1?

Solución
Con los datos R=960; i=0,1; n=5 y con la fórmula (2.1a), se tiene:

$S = R.FCS_{0,1;5}$ $S = 960\left[\frac{(1+0{,}01)^{5}-1}{0{,}01}\right] = 960 \times 6{,}1051 = 5\,860{,}90$

Ejemplo 2.3
¿Qué monto se acumulará en una cuenta de ahorros, si a fin de mes y durante 4 meses consecutivos se depositaron 100 um, por los que se percibe una TNA de 0,24 capitalizable mensualmente?

Solución
Con los datos R=100; i=0,02; n=4 y con la fórmula (2.1a), se tiene:

$S = R.FCS_{0,02;4}$ $S = 100\left[\frac{(1+0{,}02)^{4}-1}{0{,}02}\right] = 100 \times 4{,}121608 = 412{,}16$

Monto de una anualidad simple vencida cuando el período de tasa es diferente del período de renta
Cuando los importes de rentas son uniformes y sus períodos de rentas son uniformes, pero el período de tasa no coincide con los períodos de renta, entonces se sugiere hallar una tasa equivalente del período de renta.

Ejemplo 2.4
Una persona que cumplió 65 años decide jubilarse luego de haber aportado durante 25 años una renta mensual vencida de US$ 50 en su cuenta de capitalización individual (aportes para su pensión de jubilación). En ese período de tiempo, dichos aportes devengaron una TEA de 0,07. ¿Cuál es el monto acumulado en ese lapso de tiempo?

Solución
Con los datos R=50; TEM=0,005654145; n=300 y con la fórmula (2.1a), se tiene:

$TEM = (1 + TEA)^{30/360} - 1$ $TEM = (1 + 0{,}07)^{30/360} - 1 = 0{,}005654145$

En 25 años se han realizado 300 aportes mensuales, por lo tanto n=300.

$S = R.FCS_{0,005654145;300}$

$S = 50\left[\frac{(1+0{,}005654145)^{300}-1}{0{,}005654145}\right] = 50 \times 783{,}04188 = 39\,152{,}09$

Ejemplo 2.5
Calcule el monto de una anualidad cuyo horizonte temporal es 4,5 años, en ese plazo se depositaron rentas uniformes vencidas trimestrales de 1 000 um; dichas rentas devengan una TNA (tasa nominal anual) de 0,12 capitalizable bimestral-mente.

Solución
Con los datos R=1 000; TET=0,030149504; n=18 y con la fórmula (2.1a), se tiene:

$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{n} - 1$ $TET = \left(1 + \frac{0{,}12}{360 \div 30}\right)^{90/60} - 1 = 0{,}030149504$

$TET = (1 + 0{,}02)^{90/60} - 1 = 0{,}030149504$

$S = R.FCS_{0,030149504;18}$

$S = 1\,000\left[\frac{(1+0,030149504)^{18}-1}{0,030149504}\right] = 1\,000 \times 21,41231238 = 21\,412,31$

2.2 Valor presente de una anualidad simple vencida

Un conjunto de rentas uniformes que constituyen una anualidad simple vencida pueden ser llevadas hacia el inicio del horizonte temporal de la anualidad (momento 0), y constituir su respectivo *valor presente*. Por ejemplo, si las rentas que se muestran en la figura 2.4 se llevan por equivalencia financiera al momento 0, con la tasa $i = 0,05$, cada flujo de caja o renta puede *descontarse* hacia el momento 0 del siguiente modo:

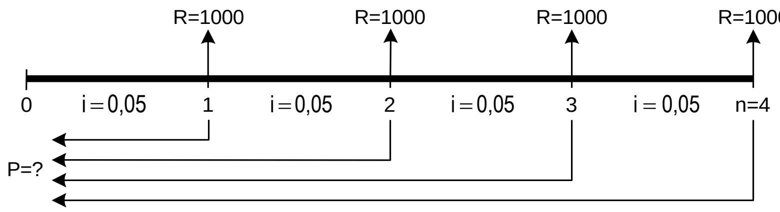


Figura 2.4. FAS que obtiene el valor presente de una anualidad simple vencida cuyas rentas son de 1 000 um.

Renta 1	$1000 \times (1+0,05)^{-1}$	= 952,38
Renta 2	$1000 \times (1+0,05)^{-2}$	= 907,03
Renta 3	$1000 \times (1+0,05)^{-3}$	= 863,84
Renta 4	$1000 \times (1+0,05)^{-4}$	= 822,70
P	Valor presente	= 3 545,95

El valor presente de la anualidad de 3 545,95 um se obtuvo al descontar cada renta durante el número de períodos que median entre el momento de su ocurrencia y el inicio del horizonte temporal (momento 0). La renta 1 se des-contó un período, la renta 2 se descontó dos períodos, la renta 3 se descontó tres períodos y la renta 4 se descontó cuatro períodos. Puede observarse que el importe de cada renta disminuye en la medida que se aleja del inicio de la anualidad.

Demostración de la fórmula del valor presente de una anualidad simple vencida

En términos generales, dado una tasa efectiva i, las rentas R que constituyen una anualidad simple vencida pueden transformarse por equivalencia financiera en su respectivo valor presente P.

Al tomar como fecha focal el inicio del horizonte temporal de la anualidad puede deducirse la fórmula del valor presente de una anualidad simple del siguiente modo:

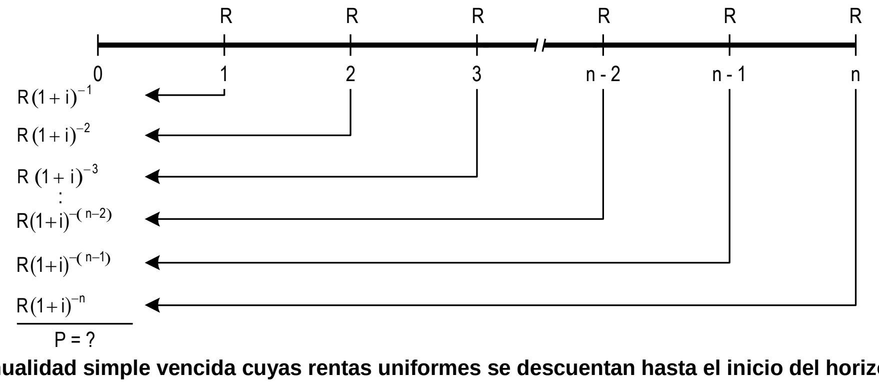


Figura 2.5. Anualidad simple vencida cuyas rentas uniformes se descuentan hasta el inicio del horizonte temporal.

Cada flujo de caja R se descuenta durante n períodos de renta: el primero durante un período, el segundo durante dos períodos, el penúltimo durante n-1 períodos y el último durante n períodos. El valor presente de la anualidad es igual a la suma de los valores presentes de cada R descontados hacia el inicio del horizonte temporal:

$$P = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^{n-1}} + \frac{R}{(1+i)^n} \qquad (1)$$

$$P = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{1+i}.\frac{1}{1+i} + \frac{R}{1+i}.\frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{1+i}.\frac{1}{(1+i)^{n-2}} + \frac{R}{1+i}.\frac{1}{(1+i)^{n-1}} \qquad (2)$$

$$P = a + a\,x + a\,x^2 + \dots + a\,x^{n-2} + a\,x^{n-1} \quad (3)$$

$$Px = ax + a\,x^2 + a\,x^3 + \dots + a\,x^{n-1} + a\,x^n \quad (4)$$

$$P = a + ax + ax^2 + \dots + ax^{n-2} + ax^{n-1} \quad (5)$$

$$-Px = \quad - ax - ax^2 - \dots - ax^{n-2} - ax^{n-1} - ax^n \quad (6)$$

$$P(1-x) = a \qquad - ax^n \quad (7)$$

$$P = \frac{a - ax^n}{1-x} \quad (8)$$

$$P = \frac{a(1-x^n)}{1-x} = \frac{\frac{R}{1+i}\left[\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} - \frac{1}{(1+i)^n}\right]}{\frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i}} = \frac{\frac{R}{1+i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right]}{\frac{1}{1+i}} \quad (9)$$

(1) Valor presente de una anualidad simple vencida.

(2) Al sacar factor común $\frac{R}{1+i}$

(3) Al hacer $\frac{R}{1+i} = a$ y $\frac{1}{1+i} = x$

(4) Al multiplicar (3) por x

(5) Al restar (4) de (3)

Al reagrupar y simplificar (9) se tiene:

$$\boxed{P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]} \quad (2.2a)$$

La fórmula (2.2a) calcula el valor presente de una anualidad simple vencida en la cual R, i y n son del mismo plazo. Como el valor presente de una anualidad simple es la suma de los n términos de una sucesión geométrica decreciente, como se observa en (1), la fórmula (2.2a) puede obtenerse con la fórmula de la suma de una progresión geométrica:

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ Donde: $a_1 = \frac{R}{1+i}$ y $r = \frac{1}{(1+i)}$

$$P = \frac{\frac{R}{1+i}\left[\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} - \frac{1}{(1+i)^n}\right]}{\frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i}} = \frac{\frac{R}{1+i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right]}{\frac{i}{1+i}} = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

También puede hallarse el valor presente de una anualidad simple vencida, a partir del valor futuro (fórmula 2.1a), que se trae al presente con el FSA (factor simple de actualización.

$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$	(1)	Fórmula (2.1a)
$S = P(1+i)^n$	(2)	Valor futuro a partir de un valor presente
$P(1+i)^n = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$	(3)	Al reemplazar (2) en (1)
$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$		

El factor de actualización de la serie uniforme FAS

En la fórmula (2.2a) el término entre corchetes, es el Factor de Actualización de la Serie uniforme (FAS), por lo tanto la fórmula (2.2a) se representa:

$$\boxed{P = R.FAS_{i;n}} \quad (2.2b)$$

La fórmula (2.2b) se lee: "el FAS a una tasa i por período durante n períodos de renta, transforma una serie uniforme de rentas vencidas R en un valor presente P". El $FAS = \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$ es el valor actual de una anualidad cuyas rentas uniformes simples vencidas son de 1 um. Por ejemplo, el FAS = 5,755851384 de la figura 2,6 es el valor presente de la anualidad cuya renta uniforme es 1 um y la TEM es 0,012.

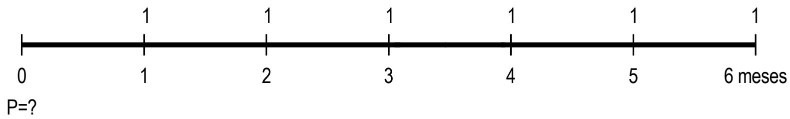


Figura 2.6. FAS que obtiene el valor presente de una anualidad simple vencida cuyas rentas son de un importe de 1 um.

$FAS = \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$ $\quad FAS = \frac{(1+0{,}012)^6-1}{0{,}012(1+0{,}012)^6} = 5{,}755851384$

Ejemplo 2.6

Calcule:

a. El FAS de una anualidad cuyas rentas uniformes mensuales vencidas son de 1 um; la TEM es 0,01 y el horizonte temporal es dos años.
b. El valor presente de la anualidad si las rentas uniformes mensuales vencidas son de 3 000 um, y las demás variables son las mismas del acápite a.

Solución

Con los datos R=1; R=3 000 i=0,01; n=24 y con la fórmula del FAS, se tiene:

a. Valor presente de la anualidad con rentas de 1 um

$FAS = \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$ $\quad FAS = \frac{(1+0{,}01)^{24}-1}{0{,}01(1+0{,}01)^{24}} = 21{,}24338726$

b. Valor presente de la anualidad con rentas de 3 000 um

$P = R.FAS_{i;n}$ $\quad P = 3\ 000 \left[\frac{(1+0{,}01)^{24}-1}{0{,}01(1+0{,}01)^{24}}\right]$

$$P = 3\ 000 \times 21{,}24338726 = 67\ 730{,}16$$

Ejemplo 2.7

Calcule el valor presente de 5 flujos anuales vencidos de 500 um cada uno. La tasa de descuento es una TEA de 0,1.

Solución

Con los datos R=500; TEA=0,1; n=5 y con la fórmula (2.2a) se tiene:

$P = R.FAS_{i;n}$ $\quad P = 500 \left[\frac{(1+0{,}1)^5-1}{0{,}1(1+0{,}1)^5}\right] = 500 \times 3{,}790786769 = 1\ 895{,}39$

Ejemplo 2.8

Hoy la empresa Sara S.A. decide cancelar las 4 últimas cuotas uniformes insolutas de un préstamo contraído con una entidad financiera. El importe de cada cuota es 800 um; las cuales vencerán dentro de 30, 60, 90 y 120, días respectivamente. ¿Qué importe debe cancelarse hoy si el banco acreedor aplica una TNA de 0,18 capitalizable mensualmente?

Solución

Con los datos R=800; i=0,015; n=4 y con la fórmula (2.2a), se tiene:

$$P = R.FAS_{0,015;4} = 800\left[\frac{(1+0,015)^4-1}{0,015(1+0,015)^4}\right] = 800 \times 3,854384647 = 3\,083,51$$

$$P = R.FAS_{i;n} \qquad P = 800\left[\frac{(1+0,015)^4-1}{0,015(1+0,015)^4}\right] = 800 \times 3,854384647 = 3\,083,51$$

Valor presente de una anualidad simple vencida cuando el período de tasa es diferente del período de renta

Cuando los importes de rentas son uniformes y sus períodos de rentas son uniformes, pero el período de tasa no coincide con los períodos de renta, entonces se sugiere hallar una tasa equivalente del período de renta.

Ejemplo 2.9
¿Cuánto debe depositarse hoy para retirar cada 90 días una renta uniforme simple vencida de 3 000 um durante el plazo de año y medio? El depósito devenga una TEA de 0,12.

Solución
Con los datos R=3 000; TET=0,028737345; n=6 y con la fórmula (2.2a), se tiene:

$$TET = (1+TEA)^{90/360} - 1 \qquad TET = (1+0,12)^{1/4} - 1 = 0,028737345$$

$$P = R.FAS_{0,028737345;6} \qquad P = 3000\left[\frac{(1+0,028737345)^6-1}{0,028737345(1+0,028737345)^6}\right]$$

$$P = 3\,000 \times 5,439935486 = 16\,319,81$$

Ejemplo 2.10
Calcule el valor presente de 12 flujos de caja futuros, cada uno de esos flujos vencen cada 30 días en el período de un año. Los flujos de caja uniformes son de 2 000 um y la tasa de evaluación es una TNA de 0,12 capitalizable trimestralmente.

Solución
Con los datos R=2 000; TEM=0,009901634; n=12 y con la fórmula (2.2a), se tiene:

$$i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^n - 1 \qquad TEM = \left(1+\frac{0,12}{4}\right)^{30/90} - 1 = 0,009901634$$

$$P = R.FAS_{0,009901634;12}$$

$$P = 2\,000\left[\frac{(1+0,009901634)^{12}-1}{0,009901634(1+0,009901634)^{12}}\right] = 2\,000 \times 11,26207569 = 22\,524,15$$

2.3 Rentas uniformes vencidas

Si se conocen: la tasa de interés i, el número de rentas uniformes n, y además el importe de un stock de efectivo que puede ubicarse al inicio del horizonte temporal P, o al final de dicho horizonte S, de una anualidad simple; puede calcularse por equivalencia financiera el importe de sus respectivas rentas equivalentes.

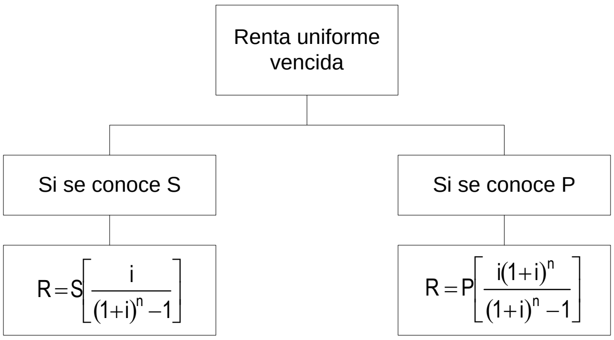


Figura 2.7 Rentas uniformes vencidas equivalentes de una anualidad simple, cuando además de i y n, se conoce el valor futuro o el valor presente.

Las rentas uniformes vencidas que se muestran en la figura 2.7 se obtienen al despejarlas de las fórmulas (2.1a) y (2.2a).

Para el cálculo de los importes de las rentas uniformes simples vencidas, el período de la tasa de interés debe subordinarse al período de renta; si no fuese así, debe convertirse el período de la tasa proporcionada como dato, al período de renta. Para estos efectos se proporcionaliza la tasa nominal o se halla la tasa equivalente en el caso que la tasa sea efectiva; en ambos casos la tasa dato se lleva al período de renta.

2.4 Renta uniforme vencida a partir de S

Un valor futuro puede convertirse en *rentas uniformes equivalentes*. Esta equivalencia financiera es necesario realizarla cuando quiere acumularse un fondo con aportes periódicos que devengan una tasa de interés efectiva. Por ejemplo, si un activo sin valor de desecho debe remplazarse dentro de 1 año y se estima que en esa fecha tenga un valor de 4 310,13 um ¿cuál será el importe de la renta uniforme vencida trimestral que durante el plazo de un año acumule dicho valor futuro, si estas rentas generan una TET de 0,05? Esta información se muestra en la figura 2.8.

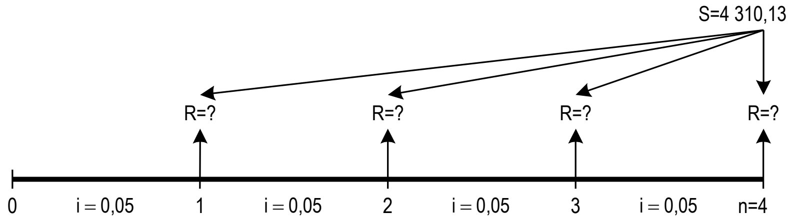


Figura 2.8 Rentas uniformes que deben calcularse a partir de un valor futuro conocido.

Para obtener una fórmula que resuelva el problema del ejemplo anterior, si se conocen: una tasa efectiva i, el número de períodos de renta n y el importe del valor futuro S, puede despejarse R de la fórmula (2.1a).

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \qquad (2.1a)$$

$$R = S\left[\frac{1}{\frac{(1+i)^n-1}{i}}\right]$$

Al reagrupar términos, se tiene:

$$\boxed{R = S\left[\frac{i}{(1+i)^n-1}\right]} \qquad (2.3a)$$

La fórmula (2.3a) calcula la renta uniforme vencida a partir de un valor futuro en la cual i y n son del mismo plazo. Con esta fórmula puede solucionarse el ejemplo anterior del siguiente modo:

$$R = 4\ 310{,}13\left[\frac{0{,}05}{(1+0{,}05)^4-1}\right] = 4\ 310{,}13 \times 0{,}2320118326 = 1\ 000$$

El factor de depósito al fondo de amortización FDFA

En la fórmula (2.3a) el término entre corchetes, es el Factor de Depósito al Fondo de Amortización (FDFA), por lo tanto la fórmula (2.3a) se representa:

$$\boxed{R = S.FDFA_{i;n}} \qquad (2.3b)$$

La fórmula (2.3b) se lee: "el FDFA a una tasa i por período durante n períodos de renta, transforma un valor futuro en una renta uniforme R". El $FDFA = \left[\frac{i}{(1+i)^n-1}\right]$ es la renta uniforme vencida que colocada durante cada período de renta en el horizonte temporal, permite acumular una um al final de dicho horizonte. Por ejemplo, el FDFA = 0,161736243 de la figura 2,9 es el importe de cada una de las seis rentas uniformes vencidas que devengan una TEM de 0,012 y que acumulan un monto de 1 um al final del sexto mes.

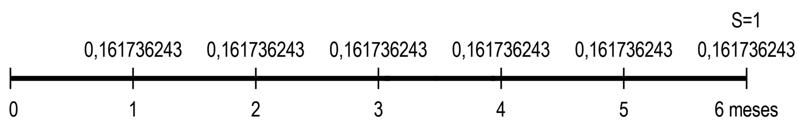


Figura 2.9 FDFA que permite calcular rentas uniformes vencidas cuyo monto es 1 um.

$$FDFA = \left[\frac{i}{(1+i)^n-1}\right] \qquad FDFA = \frac{0{,}012}{(1+0{,}012)^6-1} = 0{,}161736243$$

Ejemplo 2.11
Calcule el FDFA que al final de un quinquenio permite calcular rentas uniformes anuales vencidas cuyo monto es 1 um; la TEA es 0,14. Si al final de ese período se requiere que el monto sea 10 000 um, ¿cuál es el importe de las rentas anuales uniformes vencidas?

Solución
Con los datos S=1; TEA=0,14; n=5 y con la fórmula del FDFA, se tiene:

$$FDFA = \left[\frac{i}{(1+i)^n-1}\right] \qquad FDFA = \frac{0{,}14}{(1+0{,}14)^5-1} = 0{,}151283546$$

Renta uniforme vencida que permite acumular un monto de 10 000 um

$$R = S.FDFA_{i;n} \qquad R = 10\,000\left[\frac{0{,}14}{(1+0{,}14)^5-1}\right]$$

$$R = 10\,000 \times 0{,}151283546 = 1\,512{,}84$$

Ejemplo 2.12
Calcule el importe del depósito uniforme quincenal vencido necesario para acumular un monto de 8 000 um en el plazo de 2 años. Estos depósitos que se efectuarán en un banco perciben una TEQ de 0,005.

Solución
Con los datos S=8 000; TEQ = 0,005; n=48 y con la fórmula (2.3a) se tiene:

$$R = S.FDFA_{0{,}005;48} \qquad R = 8\,000\left[\frac{0{,}005}{(1+0{,}005)^{48}-1}\right]$$

$$R = 8\,000 \times 0{,}018485029 = 147{,}88$$

Ejemplo 2.13
Una empresa decidió hoy adquirir dentro de 4 meses un grupo electrógeno cuyo precio estimado será 5 000 um en esa fecha. ¿Qué importe uniforme de fin de mes, debe ahorrarse en ese período de tiempo, en un banco que paga una TNA de 0,24 con capitalización mensual, a fin de disponer ese monto al vencimiento de dicho plazo?

Solución
Con los datos S=5 000; i=0,02; n=4 y con la fórmula (2.3a), se tiene:

$$R = S.FDFA_{0{,}02;4} \qquad R = 5\,000\left[\frac{0{,}02}{(1+0{,}02)^4-1}\right]$$

$$\mathrm{R} = 5\,000 \times 0{,}2426237527 = 1\,213{,}12$$

Renta uniforme vencida a partir de S cuando el período de tasa es diferente del período de renta
En este caso debe convertirse la tasa de interés en una tasa equivalente o en una tasa proporcional, según las tasas proporcionadas como datos sean efectivas o nominales, respectivamente.

Ejemplo 2.14
Halle el importe de la renta uniforme vencida cuatrimestral necesaria para acumular un fondo de amortización que devenga una TES (tasa efectiva semestral) de 0,05; y liquidar una deuda de 20 000 um al final de un período de 3 años.

Solución
Con los datos S=20 000; TEC=0,033061554; n=9 y con la fórmula (2.3a), se tiene:

$$TEC = (1+TES)^{120/180} - 1 \qquad TEC = 1{,}05^{4/6} - 1 = 0{,}033061554$$

$$R = S.FDFA_{0{,}033061554;9} \qquad R = 20\,000\left[\frac{0{,}033061554}{(1+0{,}033061554)^9-1}\right]$$

$$R = 20\,000 \times 0{,}09721252 = 1\,944{,}25$$

Ejemplo 2.15
Al final de un período de 3 años debe disponerse un monto de 50 000 um. Calcule el importe de la renta uniforme mensual vencida que debe colocarse en ese plazo en un banco, si estos depósitos devengan una TNA de 0,12 capitalizable cuatrimestralmente.

Solución
Con los datos S=50 000; TEM=0,009853407; n=36 y con la fórmula (2.3a), se tiene:

$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^n - 1$ $\qquad TEM = \left(1 + \frac{0{,}12}{3}\right)^{30/120} - 1 = 0{,}009853407$

$R = S.FDFA_{0{,}009853407;36}$ $\qquad R = 50\,000\left[\frac{0{,}009853407}{(1+0{,}009853407)^{36}-1}\right]$ $\qquad R = 50\,000 \times 0{,}023276946 = 1\,163{,}85$

2.5 Renta uniforme vencida a partir de P

Un valor presente puede convertirse en *rentas uniformes equivalentes*, esta operación es necesaria realizarla, entre otros casos, cuando se necesita un financiamiento para amortizarlo con cuotas uniformes durante un determinado horizonte temporal. Por ejemplo, si un préstamo de 3 545,95 um que devenga una TET de 0,05 debe amortizarse en el plazo de un año con cuotas uniformes trimestrales vencidas y se requiere conocer el importe de esa cuota.

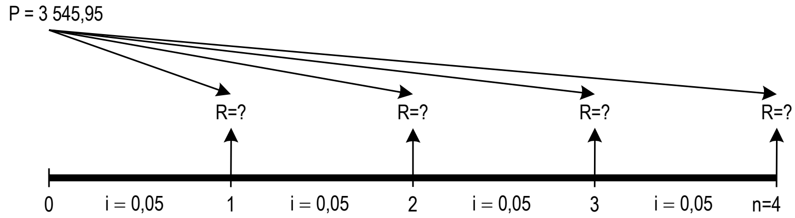


Figura 2.10 Rentas uniformes que deben calcularse a partir de un valor presente conocido.

Para obtener una fórmula que resuelva el problema anterior si se conoce una tasa efectiva i, el número de períodos de renta n y el importe del valor presente P, puede despejarse R de la fórmula (2.2a).

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \quad (2.2a)$$

$$R = P\left[\frac{1}{\dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}}\right]$$

Al reagrupar términos, se tiene:

$$\boxed{R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]} \quad (2.4a)$$

La fórmula (2.4a) calcula la renta uniforme vencida a partir de un valor presente en el cual i y n deben ser del mismo plazo de R. Con la fórmula (2.4a) puede solucionarse el ejemplo anterior del siguiente modo.

$$R = 3\,545{,}95\left[\frac{0{,}05(1+0{,}05)^4}{(1+0{,}05)^4 - 1}\right] = 3\,545{,}95 \times 0{,}282011832 = 1\,000$$

El factor de recuperación del capital FRC

En la fórmula (2.4a) el término entre corchetes, es el Factor de Recuperación del Capital (FRC), por lo tanto la fórmula (2.4a) se representa:

$$\boxed{R = P.FRC_{i;n}} \quad (2.4b)$$

La fórmula (2.4b) se lee: "el FRC a una tasa i por período durante n períodos de renta, transforma un valor presente en una renta uniforme R". El $FRC = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ es la renta uniforme vencida que amortiza un préstamo de 1 um durante un determinado horizonte temporal. Por ejemplo, el FRC = 0,173736243 de la figura 2,11 es el importe de cada una de las seis rentas uniformes mensuales vencidas que devengan una TEM de 0,012 y que amortizan un préstamo de 1 um.

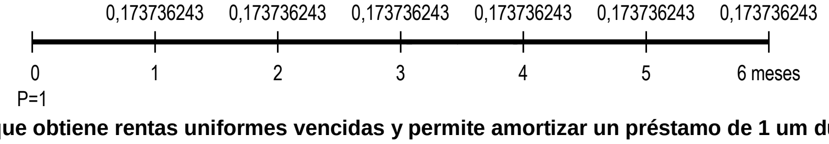


Figura 2.11 FRC que obtiene rentas uniformes vencidas y permite amortizar un préstamo de 1 um durante el horizonte temporal de la anualidad.

$$FRC = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \qquad FRC = \frac{0{,}012(1+0{,}012)^6}{(1+0{,}012)^6 - 1} = 0{,}173736243$$

Ejemplo 2.16
Calcule el FRC que durante un horizonte temporal de 3 años permite calcular la renta uniforme vencida bimestral que amortiza un préstamo de 1 um; la TEB (tasa efectiva bimestral) es 0,02. Si el préstamo fuese de 20 000 um, ¿cuál es el importe de las rentas bimestrales uniformes vencidas?

Solución
Con los datos P=1; TEB=0,02; n=18 y con la fórmula del FRC, se tiene:

$$FRC = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} \qquad FRC = \frac{0{,}02(1+0{,}02)^{18}}{(1+0{,}012)^{18}-1} = 0{,}066702102$$

Renta uniforme vencida que permite amortizar un préstamo de 20 000 um

$$R = P.FRC_{i;n} \qquad R = 20\,000\left[\frac{0{,}02(1+0{,}02)^{18}}{(1+0{,}02)^{18}-1}\right] = 20\,000 \times 0{,}066702102 = 1\,334{,}04$$

Ejemplo 2.17
Si usted tiene una inversión de 50 000 um que devenga una TEM de 0,01 ¿cuál es el importe de la cuota uniforme que puede retirar cada fin de mes durante un período de 2 años?

Solución
Con los datos P=50 000; TEM = 0,01; n=24 y con la fórmula (2.4a) se tiene:

$$R = P.FRC_{0{,}01;24} \qquad R = 50\,000\left[\frac{0{,}01\times1{,}01^{24}}{1{,}01^{24}-1}\right] = 50\,000 \times 0{,}047073472 = 2\,353{,}67$$

Ejemplo 2.18
¿Cuál es la cuota uniforme por pagar por un préstamo bancario de 8 000 um, que debe amortizarse durante un año con cuotas mensuales vencidas? El préstamo devenga una TNA de 0,36 capitalizable mensualmente.

Solución
Con los datos P=8 000; TEM = 0,03; n=12 y con la fórmula (2.4a) se tiene:

$$R = P.FRC_{0{,}03;12} \qquad R = 8\,000\left[\frac{0{,}03\times1{,}03^{12}}{1{,}03^{12}-1}\right] = 8\,000 \times 0{,}1004620855 = 803{,}7$$

Renta uniforme vencida a partir de P cuando el período de tasa es diferente del período de renta
Ejemplo 2.19
Una persona compró un departamento con el sistema de crédito Mi Vivienda; este departamento tuvo un precio al contado de US$ 40 000. Realizó un pago de US$ 5 000 y el saldo lo financió en el plazo de 20 años, en el cual deberá realizar pagos uniformes mensuales vencidos. Este crédito hipotecario devenga una TEA de 0,11. Calcule el importe de la cuota uniforme.

Solución
Con los datos P=35 000; TEM = 0,008734594; n=240 y con la fórmula (2.4a) se tiene:

$$TEM = (1+TEA)^{30/360} - 1 \qquad TEM = 1{,}11^{1/12} - 1 = 0{,}008734594$$

$$R = P.FRC_{0{,}008734594;240} \qquad R = 35\,000\left[\frac{0{,}008734594\times1{,}008734594^{240}}{1{,}008734594^{240}-1}\right]$$

$$R = 35\,000 \times 0{,}009971383 = 348{,}99$$

Ejemplo 2.20
Una empresa debe pagar una deuda de 50 000 um, dado que en la fecha no tiene liquidez para afrontar este pago, logra conseguir un plazo de financiamiento de un año en el cual debe amortizar la deuda con cuotas uniformes que vencen cada 45 días. En este financiamiento se carga una TNT (tasa nominal trimestral) de 0,03 capitalizable mensualmente; calcule el importe de la cuota uniforme vencida.

Solución
Con los datos P=50 000; $TE_{45\ días}$ = 0,015037438; n=8 y con la fórmula (2.4a) se tiene:

$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^n - 1$ $\quad$ $TE_{45\ días} = \left(1 + \frac{0{,}03}{90 \div 30}\right)^{45/30} - 1 = 0{,}015037438$

$R = P.FRC_{0{,}015037438;8}$ $\quad$ $R = 50\,000 \left[\frac{0{,}015037438 \times 1{,}015037438^8}{1{,}015037438^8 - 1}\right]$

$R = 50\,000 \times 0{,}133605812 = 6\,680{,}29$

2.6 Cálculo de n en una anualidad vencida

En los puntos anteriores se calculó el valor futuro y valor presente de una anualidad y las rentas uniformes a partir del valor futuro y del valor presente conocidos. Ahora, pueden formularse las siguientes preguntas:

- ¿Con cuántas rentas uniformes puede *amortizarse* un *valor presente* que devenga una tasa de interés, si se conoce el importe de la renta?
- ¿Con cuántos períodos de rentas uniformes podría *acumularse* un *valor futuro*, si se conoce el importe de las rentas uniformes y éstas devengan una tasa de interés?

El valor de n en una anualidad simple indica el número de períodos de tasa o el número de rentas.

Con la ayuda del computador puede obtenerse el valor de n a través de procesos algorítmicos realizados por Solver o Buscar objetivo que son herramientas del tipo What if? que dispone Excel. El cálculo algebraico para hallar el valor de n se presenta a continuación.

Cálculo de n a partir de P

Dado que las fórmulas (2.2a) o (2.4a) incluyen la variable P, puede despejarse n en ambas fórmulas con el mismo resultado.

$$P=R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] \quad (2.2a)$$

$$R=P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right] \quad (2.4a)$$

Al despejar n de la fórmula (2.4a), se tiene:

$$R=P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right] \quad (1)$$

$$R= P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] \quad (2)$$

$$R[1-(1+i)^{-n}]=Pi \quad (3)$$

$$-(1+i)^{-n}=\frac{Pi}{R}-1 \quad (4)$$

$$(1+i)^{-n}=1-\frac{Pi}{R} \quad (5)$$

Al tomar el logaritmo en ambos miembros de la expresión (5), se tiene:

$$\boxed{n=-\frac{Log\left[1-\frac{Pi}{R}\right]}{Log(1+i)}} \quad (2.5)$$

La fórmula (2.5) calcula el número de períodos de renta en una anualidad simple vencida, cuando se conoce un valor presente P y donde R e i, son del mismo período, por lo tanto el período de n o período de renta es el mismo de i.

Ejemplo 2.21

Una deuda de 78 641,52 um devenga una TEM de 0,01 y se amortiza con cuotas uniformes mensuales vencidas de 4 000 um. ¿Con cuántas cuotas se cancela dicha deuda?

Solución

Con los datos P=78 641,52; TEM = 0,01; R=4 000 y con la fórmula (2.5) se tiene:

$$n=-\frac{Log\left[1-\frac{Pi}{R}\right]}{Log(1+i)} \qquad n=-\frac{Log\left[1-\frac{78\,641{,}52\times 0{,}01}{4\,000}\right]}{Log(1+0{,}01)} \qquad n=-\frac{Log[0{,}8033962]}{Log\ 1{,}01}=22$$

Cálculo de n a partir de S

Dado que las fórmulas (2.1a) o (2.3a) incluyen la variable S, puede despejarse n en ambas fórmulas con el mismo resultado.

$$S=R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \quad (2.1a)$$

$$R=S\left[\frac{i}{(1+i)^n-1}\right] \quad (2.3a)$$

Al despejar n de la fórmula (2.1a), se tiene:

$$Si=R(1+i)^n-1 \quad (1)$$

$$\frac{Si}{R}+1=(1+i)^n \quad (2)$$

$$Log\left(\frac{Si}{R}+1\right)=nLog(1+i) \quad (3)$$

$$\boxed{n=\frac{Log\left[\frac{Si}{R}+1\right]}{Log(1+i)}} \quad (2.6)$$

La fórmula (2.6) calcula el número de períodos de renta o números de renta en una anualidad simple vencida cuando se conoce el valor futuro S y donde R e i, son del mismo período, por lo tanto el período de n es el mismo de i.

Ejemplo 2.22

¿Con cuántas cuotas uniformes trimestrales vencidas de 5 000 um puede acumularse un fondo de amortización de 78 088,96 um, si esos depósitos vencidos devengan una TET de 0,03?

Solución

Con los datos S=78 088,96; TET = 0,03; R=5 000 y con la fórmula (2.6) se tiene:

$$n=\frac{Log\left[\frac{Si}{R}+1\right]}{Log(1+i)} \qquad n=\frac{Log\left[\frac{78\,088{,}96\times 0{,}03}{5\,000}+1\right]}{Log(1+0{,}03)} \qquad n=\frac{Log\ 1{,}46853376}{Log\ 1{,}03}=13$$

Significado de n cuando tiene un valor no entero

El resultado de las fórmulas (2.5) y (2.6) puede ser un número entero, o un número no entero que tiene un sentido matemático pero no necesariamente un sentido económico; de este modo, ¿cómo puede interpretarse el resultado n=4,49 del siguiente ejemplo?

Ejemplo 2.23

¿Con cuántas cuotas uniformes trimestrales vencidas de 2 410 um puede amortizarse un préstamo de 10 000 um, que devenga una TET de 0,03?

Solución

Con los datos R=2 410; TET=0,03; P=10 000 y con la fórmula (2.5) se tiene:

$$n=-\frac{Log\left[1-\frac{Pi}{R}\right]}{Log(1+i)} \qquad n=-\frac{Log\left[1-\frac{10\,000\times 0{,}03}{4\,000}\right]}{Log(1+0{,}03)} \qquad n=-\frac{Log[0{,}875518672]}{Log\ 1{,}03}=4{,}497435279$$

El resultado n=4,497435279 significa que:

- Se requieren aproximadamente 4,5 cuotas trimestrales vencidas de 2 410 um para amortizar un préstamo de 10 000 um.
- Las 4 primeras cuotas trimestrales son de un importe de 2 410 um.
- En el presente caso para calcular el importe de la última cuota en el momento $n = 4{,}497435279$ debe plantearse la siguiente ecuación de equivalencia financiera.

$$10\,000 = \frac{2\,410}{1{,}03} + \frac{2\,410}{1{,}03^2} + \frac{2\,410}{1{,}03^3} + \frac{2\,410}{1{,}03^4} + \frac{R_5}{1{,}03^{4{,}497435279}}$$

$$10\,000 = 8\,958{,}21 + 0{,}875518672R_5$$

$$R_5 = 1\,189{,}92$$

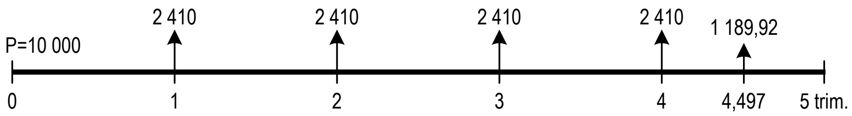


Figura 2.12 Valores para n=4,497435279.

- La fecha de vencimiento de la última cuota de 1189,92 um es el día 404,77; para hallar este momento, multiplique el período de cuota por el valor de n.

$$Fecha\ de\ vencimiento\ de\ R_5 = 90 \times 4{,}497435279 = 404{,}77$$

Como podrá observar el valor de n no entero tiene sentido matemático, pero no necesariamente financiero, ya que en este caso el vencimiento de la anualidad es el día 404 a las 18,27 horas, tiempo difícil de calcular.

- Puede verificar que el valor presente de las 4 cuotas trimestrales de 2 410 um y de la quinta cuota de 1189,92 um que vencen los días 90, 180, 270, 360 y 404,77 respectivamente generan un importe de 10 000 um.

Alternativas para modificar el valor de n no entero

Para evitar los problemas que generan la interpretación del valor de n no entero, se sugieren las siguientes alternativas:

a. Redondear n no entero al entero *inferior*, para conseguir n rentas de períodos uniformes, en el cual la última será de *mayor* importe que las anteriores.
b. Redondear n no entero al entero *superior*, para conseguir n rentas de períodos uniformes, en el cual la última cuota será de *menor* importe que las anteriores.

En el presente caso los redondeos al entero inferior y al entero superior con los datos del ejemplo 2.23 se obtienen con las siguientes ecuaciones de equivalencia financiera.

Alternativa: redondeo de n=4,49 al entero inferior n=4

$$10\,000 = \frac{2\,410}{1{,}03} + \frac{2\,410}{1{,}03^2} + \frac{2\,410}{1{,}03^3} + \frac{R_4}{1{,}03^4}$$

$$10\,000 = 6\,816{,}953 + 0{,}888487047R_4$$

$$R_4 = 3\,582{,}54$$

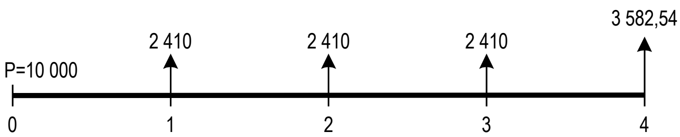


Figura 2.13 Redondeo de n=4,49 al entero inferior n=4.

Alternativa: redondeo de n=4,49 al entero superior n=5

$$10\ 000 = \frac{2\ 410}{1{,}03} + \frac{2\ 410}{1{,}03^2} + \frac{2\ 410}{1{,}03^3} + \frac{2\ 410}{1{,}03^4} + \frac{R_5}{1{,}03^5}$$

$$10\ 000 = 8\ 958{,}21 + 0{,}862608784R_5$$

$$R_5 = 1\ 207{,}72$$

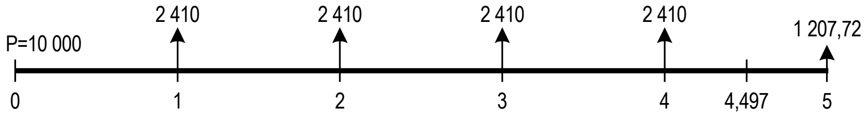


Figura 2.14 Redondeo de n=4,49 al entero superior n=5.

Ejemplo 2.24
Se desea acumular 77 694,68 um en un fondo de amortización que devenga una TEC (tasa efectiva cuatrimestral) de 0,05; en ese período se efectuarán depósitos uniformes vencidos de 4 000 um cada 40 días. ¿Cuántos depósitos deben realizarse para acumular ese fondo?

Solución
Con los datos R=4 000; $TE_{40\ días}$=0,016396357; S=77 694,68 y con la fórmula (2.6) se tiene:

$$TE_{40\ días} = (1 + TEC)^{40/120} - 1 \qquad TE_{40\ días} = 1{,}05^{40/120} - 1 = 0{,}016396357$$

$$n = \frac{Log\left[\frac{Si}{R}+1\right]}{Log(1+i)} \qquad n = \frac{Log\left[\frac{77\ 694{,}68\times 0{,}016396357}{4\ 000}+1\right]}{Log\ 1{,}016396357} = 17$$

Ejemplo 2.25
¿Cuántos depósitos de fin de mes de 500 um serán necesarios ahorrar, para acumular un monto de 5 474,86 um? Los depósitos devengan TNA de 0,24 con capitalización mensual.

Solución
Con los datos R=500; TEM=0,02; S=5 474,86 y con la fórmula (2.6) se tiene:

$$n = \frac{Log\left[\frac{Si}{R}+1\right]}{Log(1+i)} \qquad n = \frac{Log\left[\frac{5\ 474{,}86\times 0{,}02}{500}+1\right]}{Log(1+0{,}02)} = 10$$

Ejemplo 2.26
Se requiere acumular un fondo de 2 000 um con depósitos mensuales vencidos de 250 um; estos depósitos devengan una TEM de 0,01.

a. ¿Cuántas rentas uniformes deben efectuarse para acumular dicho fondo? Si estas fuesen un número no entero, diga en qué fecha debe depositarse la última renta (no entera), y cuál es el importe por depositar en esa fecha.
b. Si el número de rentas fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato superior y calcule el importe de la última renta.
c. Si el número de rentas fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato inferior y calcule el importe de la última renta.

Solución
Con los datos S=2 000; TEM=0,01 y R=250; se calcula n.

a. Número de rentas necesarias para acumular el monto

$$n = \frac{Log\left[\frac{Si}{R}+1\right]}{Log(1+i)} \qquad n = \frac{Log\left[\frac{2\ 000\times 0{,}01}{250}+1\right]}{Log(1+0{,}01)} = \frac{Log\ 1{,}08}{Log\ 1{,}01} = 7{,}734520819$$

Como n es un número no entero y los depósitos se efectúan cada 30 días, la fecha del último depósito (octavo), debe realizarse el día 232 =7,734520819 × 30 y su importe en esa fecha se calcula con la siguiente ecuación de equivalencia financiera.

$$250\left[\frac{(1+0{,}01)^7-1}{0{,}01}\right]\times 1{,}01^{0{,}734520819}+R_8\text{=}2\ 000$$

$$1\ 816{,}61+R_8\text{=}2\ 000$$

$$R_8\text{=}\ 183{,}39$$

Esto significa que el fondo de 2 000 se acumulará con 8 rentas, 7 rentas mensuales de 250 um y la octava que vence 22 días después del sétimo depósito, cuyo importe es 183,39 um.

$$250.FCS_{0{,}01;7}.FSC_{0{,}01;0{,}734520819}+183{,}39\text{=}\ S$$

$$1\ 816{,}61+183{,}39\text{=}\ S$$

$$S\text{=}\ 2\ 000$$

b. Número de rentas redondeados al entero superior (n=8)
En este caso deben efectuarse 7 depósitos de 250 y el octavo de un menor importe (178,58) que debe realizarse el día 240.

$$250\left[\frac{(1+0{,}01)^7-1}{0{,}01}\right]\times 1{,}01+R_8\text{=}2\ 000$$

$$R_8\text{=}178{,}58$$

c. Número de rentas redondeados al entero inferior (n=7)
En este caso deben efectuarse 6 depósitos de 250 y el sétimo de un mayor importe (446,62 um) que debe realizarse el día 210.

$$250\left[\frac{(1+0{,}01)^6-1}{0{,}01}\right]\times 1{,}01+R_7\text{=}2\ 000$$

$$R_7\text{=}446{,}62$$

2.7 Cálculo de i (TIR) en una anualidad simple vencida

Cuando en una anualidad simple se conocen P, R, S y n, excepto la tasa efectiva periódica i, es posible hallar esta tasa si se plantea su respectiva ecuación de equivalencia financiera; se calcula con el "método de tanteo" por prueba y error. Este es un proceso iterativo que busca por aproximaciones sucesivas un par de valores, que se hallen uno por encima y otro debajo del valor buscado, y con estos datos (polos) se aproxima a su verdadero valor por interpolación lineal.

Las máquinas financieras y Excel para calcular la tasa implícita en una anualidad simple, realizan un proceso de iteraciones sucesivas, hasta conseguir que el valor actual de los flujos de caja futuros sean igual que la inversión del momento cero. Esta tasa implícita de la anualidad que se obtiene a través de los procesos descritos anteriormente, se conoce como tasa interna de retorno o TIR.

Excel calcula la TIR con las funciones financieras: TASA, TIR, TIR.NO.PER o TIRM, según las características propias de los flujos de caja que componen la anualidad.

La tasa interna de retorno TIR (Internal Rate of Return IRR), es la tasa de descuento que iguala el valor actual de los ingresos (rentas) con el valor actual de los egresos, y representa la tasa de rentabilidad generada por el saldo no recuperado de la inversión. Este indicador asume que los flujos de caja netos generados por el proyecto se reinvierten a la TIR, y que las inversiones que demanda tienen un costo financiero de la misma magnitud de la TIR.

Para obtener la TIR por el método de "prueba y error" puede utilizarse la siguiente ecuación de equivalencia financiera.

$$I_0 = \frac{FC_1}{(1+i)^1} + \frac{FC_2}{(1+i)^2} + \frac{FC_3}{(1+i)^3} + \cdots \frac{FC_n}{(1+i)^n} \qquad \text{(a)}$$

$$\boxed{I_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{FC_t}{(1+i)^t}} \quad \text{(2.7a)} \qquad \boxed{\sum_{t=1}^{n} \frac{FC_t}{(1+i)^t} - I_0 = 0} \quad \text{(2.7b)}$$

Donde:

I_0 = es el principal, la inversión o valor presente P.

FC = es el flujo de caja o renta R.

i = es la tasa interna de retorno del período de la renta uniforme R.

La ecuación (2.7a) indica que la tasa i es la TIR sólo cuando se iguala la inversión del momento cero y los flujos de caja futuros descontados hacia el momento cero. La ecuación (2.7b) es otro modo de expresar la ecuación (2.7a), en la cual la inversión del momento cero se trasladó al segundo miembro de la ecuación.

Si en la expresión (a) $FC_1 = FC_2 = FC_3 = \ldots FC_n$, entonces el segundo miembro de la igualdad es una anualidad simple vencida y sus flujos de caja o rentas uniformes, pueden traerse al momento 0 con el FAS; por lo tanto para calcular el valor aproximado de i en una anualidad simple, se utilizarán el FAS y la fórmula de interpolación lineal (2.8).

$$\boxed{x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}(x_2 - x_1)} \quad \text{(2.8)}$$

Ejemplo 2.27
Un artefacto electrodoméstico tiene un precio al contado de 1 500 um y al crédito se ofrece con una cuota inicial de 300 um y 12 cuotas uniformes de 120 um cada una que deben pagarse cada 30 días. ¿Cuál es la TEA cargada en el financiamiento?

Solución
Con los datos R=120; P=1 500 - 300=1 200; n=12; puede solucionarse el problema del siguiente modo:

$$1\,200 = \frac{120}{(1+i)^1} + \frac{120}{(1+i)^2} + \frac{120}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{120}{(1+i)^{11}} + \frac{120}{(1+i)^{12}} \quad (1)$$

$$1\,200 = 120\left[\frac{(1+i)^{12}-1}{i(1+i)^{12}}\right] \quad (2)$$

La ecuación (1) es de grado 12 que no tiene solución algebraica; por tanto, se asignarán valores a i de modo tal que el segundo miembro sea 1 200 um; para este proceso se utilizará la fórmula del FAS y la fórmula de la interpolación lineal.

i	FAS	Valor presente
0,020	10,57534122	1 269,04
0,025	10,25776460	1 230,93
0,030	9,954003993	1 194,48

En el cuadro anterior se observa que la tasa i es mayor que 0,025 pero menor que 0,03; por lo tanto se interpolará entre estos dos valores para hallar su valor aproximado.

Al hacer:

$$x_1 = 0{,}025 \qquad y_1 = 1\,230{,}93$$

$$x = ? \qquad y = 1\,200{,}00$$

$$x_2 = 0{,}03 \qquad y_2 = 1\,194{,}48$$

Y al aplicar la fórmula (2.8) se tiene:

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}(x_2 - x_1)$$

$$x = 0{,}025 + \frac{1\,200 - 1\,230{,}93}{1\,194{,}48 - 1\,230{,}93}(0{,}03 - 0{,}025)$$

$$x = 0{,}029242798$$

La tasa aproximada linealmente al verdadero valor de i es 0,029242798. La TEM calculada con la función TIR es 0,029228541; para obtener la respuesta al problema planteado, debe hallarse la TEA a partir de la TEM calculada.

$$TEA = (1 + TEM)^{360/30} - 1 \qquad TEA = 1{,}029242598^{360/30} - 1 = 0{,}413230587$$

2.8 Factores financieros

En el presente capítulo se han desarrollado los factores financieros generados por las anualidades simples vencidas. Para completar el cuadro de los seis principales factores financieros, se muestran a continuación el Factor Simple de Capitalización (FSC) y el Factor Simple de Actualización (FSA).

$$S = P(1+i)^n \quad (2.9a) \qquad S = P.FSC_{i;n} \quad (2.9b)$$

$$P = S(1+i)^{-n} \quad (2.10a) \qquad P = S.FSA_{i;n} \quad (2.10b)$$

El FSC es el monto compuesto generado por un capital de 1 unidad monetaria durante n períodos que devenga una tasa i por período; su función es llevar al futuro cualquier importe del presente o traer al presente cualquier importe del pasado.

El FSA es el valor presente de una unidad monetaria que se ubica al final del horizonte temporal, descontado con una tasa periódica i durante los n períodos de tasa; su función es traer al presente cualquier importe del futuro, o llevar al pasado cualquier importe del presente.

Los factores financieros son fórmulas matemáticas que utilizan el interés compuesto y el principio de equivalencia financiera que dice: dos unidades monetarias ubicadas en diferentes momentos del horizonte temporal no son comparables, dado que tienen diferentes poderes adquisitivos, debido a la tasa de costo de oportunidad del capital. Los factores financieros se aplican para desarrollar un conjunto de productos financieros.

Los principales factores financieros utilizados en equivalencias financieras que se apoyan en el interés compuesto (existen otros factores de gradientes que se tratarán posteriormente), ayudan a solucionar una diversidad de problemas. Ellos facilitan la explicación de: anualidades vencidas, anticipadas y diferidas, rentas perpetuas, gradientes de crecimiento y los demás capítulos que restan del presente libro. A continuación se presenta una tabla que resume los seis factores desarrollados en el presente capítulo, donde se observa que los tres factores de la izquierda constituyen los recíprocos de los de la derecha y viceversa.

FSC	$(1+i)^n$	Factor Simple de Capitalización	FSA	$(1+i)^{-n}$	Factor Simple de Actualización
FCS	$\frac{(1+i)^n-1}{i}$	Factor de Capitalización de la Serie	$FDFA$	$\frac{i}{(1+i)^n-1}$	Factor de Depósito al Fondo de Amortización
FRC	$\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$	Factor de Recuperación del Capital	FAS	$\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$	Factor de Actualización de la Serie

Tabla 2.1 Los seis factores financieros.

Si se conocen i y n, puede calcularse cualquiera de los seis factores financieros, que aplicados adecuadamente con otra variable de una anualidad, permiten efectuar transformaciones de valor equivalente con S, P o R.

$S = P.FSC_{i;n}$	Valor futuro en función del valor presente
$S = R.FCS_{i;n}$	Valor futuro en función de la renta uniforme
$P = S.FSA_{i;n}$	Valor presente en función del valor futuro
$P = R.FAS_{i;n}$	Valor presente en función de la renta uniforme
$R = S.FDFA_{i;n}$	Renta uniforme en función del valor futuro
$R = P.FRC_{i;n}$	Renta uniforme en función del valor presente

Tabla 2.2 Factores financieros vencidos aplicados a S, P y R.

En los libros de finanzas y de ingeniería financiera se han generalizado la utilización de siglas en español e inglés que representan los factores financieros, estas siglas y simbología se muestran en la tabla 2.3.

Siglas Español	Siglas Inglés	Notación	Denominación de los factores en inglés
FSC	$SPCA$	s	Single-Payment Compound Factor
FSA	$SPPWF$	v^n	Single-Payment Present-Worth Factor
FCS	$USCAF$	$s_{\overline{n}\vert i}$	Uniform-Series Compound-Amount Factor
$FDFA$	$SFDF$	$\frac{1}{s_{\overline{n}\vert i}}$	Sinking Fund Deposit Factor
FRC	CRF	$\frac{1}{a_{\overline{n}\vert i}}$	Capital Recovery Factor
FAS	$USPWF$	$a_{\overline{n}\vert i}$	Uniform-Series Present-Worth Factor

Tabla 2.3 Factores financieros aplicados a S, P y R: simbología y representación.

Relaciones entre los factores financieros

Si se supone que uno o más factores financieros utilizan la misma tasa efectiva y tienen el mismo horizonte temporal, pueden establecerse un conjunto de relaciones entre ellos sumamente útiles en la aplicación de equivalencias financieras, las principales se presentan en la tabla 2.4.

(1) $FSC_{i;n}=FRC_{i;n} \times FCS_{i;n}$	(6) $FSA_{i;n}=\frac{FDFA_{i;n}}{FRC_{i;n}}$
(2) $FCS_{i;n}=FAS_{i;n} \times FSC_{i;n}$	(7) $FDFA_{i;n}=FRC_{i;n} - i$
(3) $FCS_{n+1}=FCS_{i;n} + FSC_{i;n}$	(8) $FDFA_{i;n}=FSA_{i;n} \times FRC_{i;n}$
(4) $FRC_{i;n}=FDFA_{i;n} + i$	(9) $FAS_{i;n}=FCS_{i;n} \times FSA_{i;n}$
(5) $FRC_{i;n}=\frac{FDFA_{i;n}}{FSA_{i;n}}$	(10) $FAS_{i;n}=\frac{FCS_{i;n}}{FSC_{i;n}}$

Tabla 2.4 Principales relaciones entre los factores financieros.

1. $FSC_{i;n} = FRC_{i;n} \times FCS_{i;n}$

$$\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] = \frac{i(1+i)^n}{i} = (1+i)^n$$

2. $FSA_{i;n} = \frac{FDFA_{i;n}}{FRC_{i;n}}$

$$\frac{\frac{i}{(1+i)^n-1}}{\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}} = \frac{i[(1+i)^n-1]}{[i(1+i)^n][(1+i)^n-1]} = \frac{i}{i(1+i)^n} = \frac{1}{(1+i)^n}$$

3. $FCS_{i;n} = FAS_{i;n} \times FSC_{i;n}$

$$\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right](1+i)^n = \frac{(1+i)^n-1}{i}$$

4. $FCS_{n+1} = FCS_{i;n} + FSC_{i;n}$

$$\frac{(1+i)^n-1}{i} + \frac{(1+i)^n}{1} = \frac{(1+i)^n-1+i(1+i)^n}{i} = \frac{(1+i)^n(1+i)-1}{i} = \frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}$$

5. $FDFA_{i;n} = FRC_{i;n} - i$

$$\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} - \frac{i}{1} = \frac{i(1+i)^n-i[(1+i)^n-1]}{(1+i)^n-1} = \frac{i(1+i)^n-i(1+i)^n+i}{(1+i)^n-1} = \frac{i}{(1+i)^n-1}$$

6. $FDFA_{i;n} = FSA_{i;n} \times FRC_{i;n}$

$$\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right] = \frac{i}{(1+i)^n-1}$$

7. $FRC_{i;n} = FDFA_{i;n} + i$

$$\frac{i}{(1+i)^n-1} + \frac{i}{1} = \frac{i + i[(1+i)^n-1]}{(1+i)^n-1} = \frac{i + i(1+i)^n - i}{(1+i)^n-1} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$$

8. $FRC_{i;n} = \frac{FDFA_{i;n}}{FSA_{i;n}}$

$$\frac{\frac{i}{(1+i)^n-1}}{\frac{1}{(1+i)^n}} = \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$$

9. $FAS_{i;n} = FCS_{i;n} \times FSA_{i;n}$

$$\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right] = \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$$

10. $FAS_{i;n} = \frac{FCS_{i;n}}{FSC_{i;n}}$

$$\frac{\frac{(1+i)^n-1}{i}}{\frac{(1+i)^n}{1}} = \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$$

11. $FAS_{i;n} \times i = 1 - FSA_{i;n}$

$$\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} \times i = \frac{[(1+i)^n-1](1+i)^{-n}}{i} \times i = 1-(1+i)^{-n}$$

2.9 Modelos de anualidades con Excel

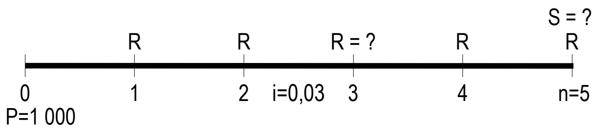
A continuación se presentan problemas de anualidades vencidas resueltos en forma tradicional y con modelos implementados en una hoja de Excel, en los cuales se utilizan las Funciones Financieras Personalizadas (FFP) del complemento HFP, que vienen en CD adjunto con el presente libro

Transformaciones financieras

1. Efectúe las seis transformaciones financieras equivalentes entre stocks y flujos de efectivo, considere un capital inicial de 1 000 um, una TEM de 0,03, un horizonte temporal de 5 meses y rentas mensuales uniformes vencidas.

Solución

Con los datos P=1 000; TEM=0,03 y n=5; se calculan los factores financieros.



a. $S = P.FSC_{0,03;5}$ $=1\,000[1,03^5]$ $=1\,000,00 \times 1,159274074$ $=1\,159,27$

b. $R = S.FDFA_{0,03;5}$ $=1\,159,27\left[\frac{0,03}{1,03^5-1}\right]$ $=1\,159,27 \times 0,188354571$ $=218,35$

c. $R = P.FRC_{0,03;5}$ $=1\,000\left[\frac{0,03\times 1,03^5}{1,03^5-1}\right]$ $=1\,000,00 \times 0,218354571$ $=218,35$

d. $P = S.FSA_{0,03;5}$ $=1\,159,27[1,03^{-5}]$ $=1\,159,27 \times 0,862608784$ $=1\,000,00$

e. $P = R.FAS_{0,03;5}$ $=218,35\left[\frac{1,03^5-1}{0,03\times 1,03^5}\right]$ $=218,35 \times 4,579707187$ $=1\,000,00$

f. $S = R.FCS_{0,03;5}$ $=1\,159,27\left[\frac{1,03^5-1}{0,03}\right]$ $=218,35 \times 5,30913581$ $=1\,159,27$

En el modelo 2.1 se han estructurado 6 modelos en las figuras 2.16 hasta 2.21 que obtienen los factores financieros y los montos, rentas y valores presentes.

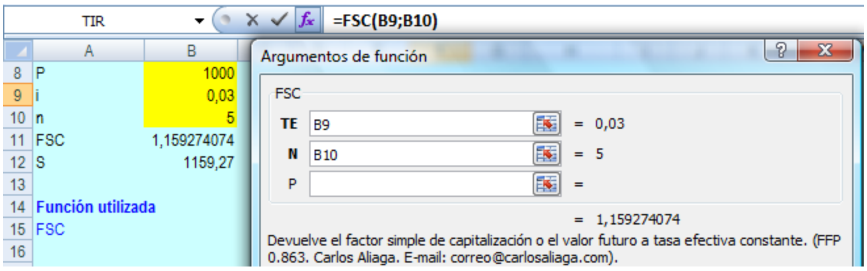


Figura 2.16 Modelo 2.1a que obtiene el FSC y el monto de un principal.

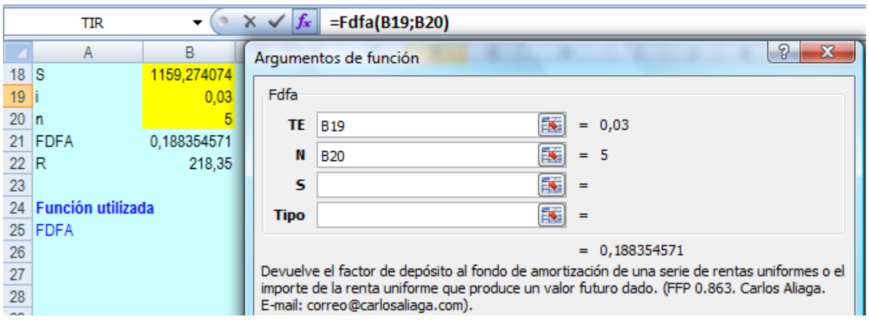


Figura 2.17 Modelo 2.1b que obtiene el FDFA y la renta uniforme de una anualidad simple a partir de un valor futuro.

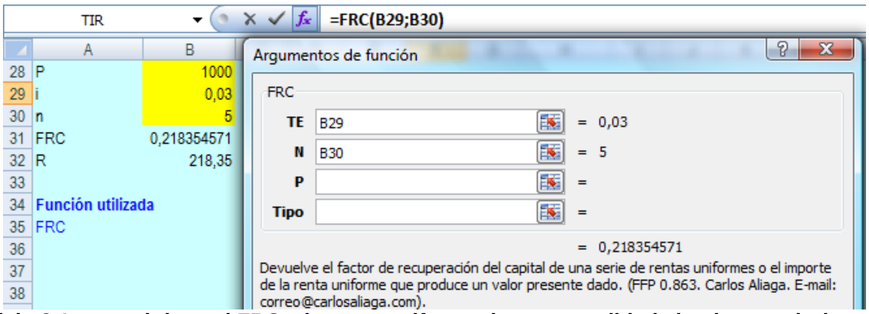


Figura 2.18 Modelo 2.1c que obtiene el FRC y la renta uniforme de una anualidad simple a partir de un valor presente.

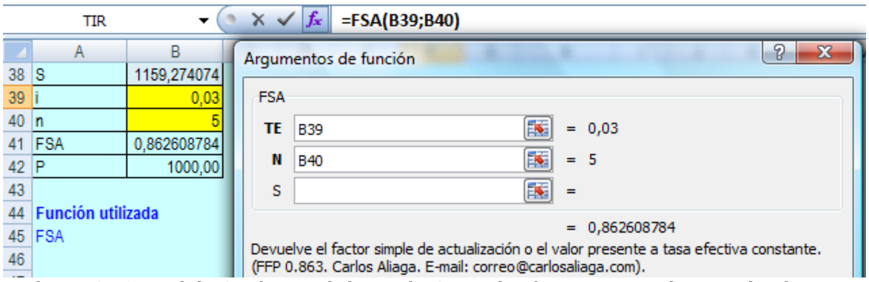


Figura 2.19 Modelo 2.1d que obtiene el FSA y el valor presente de un valor futuro.

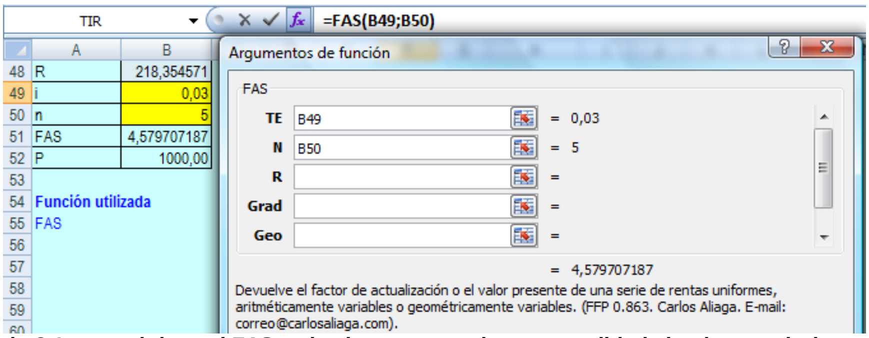


Figura 2.20 Modelo 2.1e que obtiene el FAS y el valor presente de una anualidad simple a partir de una renta uniforme.

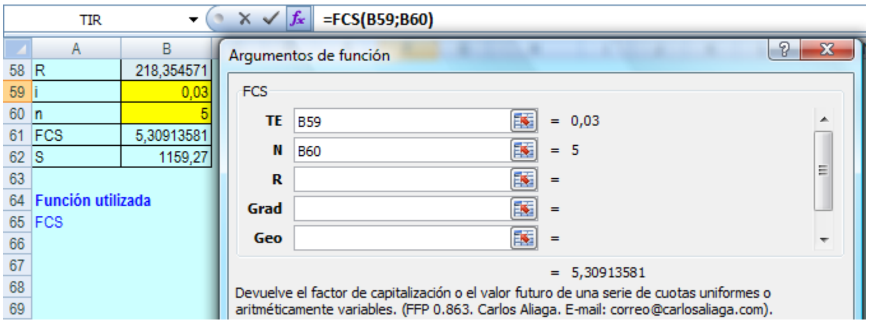


Figura 2.21 Modelo 2.1f que obtiene el FCS y el valor futuro de una anualidad simple a partir de una renta uniforme.

Cálculo de S

2. ¿Cuánto es el monto de un certificado de depósito a plazo fijo que se compró el 16 de marzo y se canceló el 15 de mayo del mismo año? La inversión inicial fue 800 um y la TNA fue 0,12 con capitalización diaria.

Solución

Con los datos P=800; TED=0,12/360=0,000333333 y n=60; se calcula S.

$S = P.FSC_{i;n}$ $\qquad S = 800\left(1+\frac{0,12}{360}\right)^{60}$ $\qquad S = 800 \times 1,02019794 = 816,16$

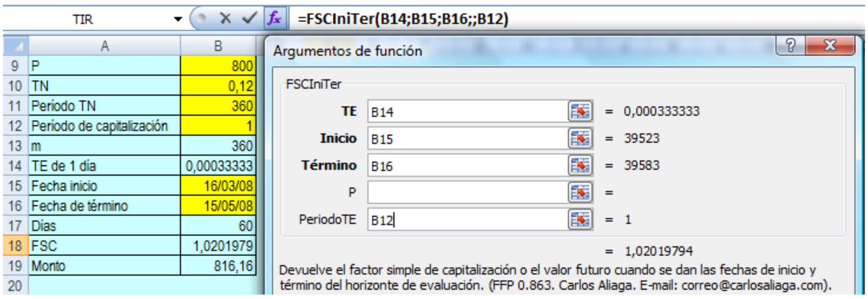


Figura 2.22 Modelo 2.2 que obtiene el FCS con fecha de inicio y fecha de término y el valor futuro de un principal.

3. ¿Cuánto es el valor nominal de un pagaré que será descontado en un banco cuando falten 38 días para su vencimiento, si requiere disponerse un importe neto de 1 000 um, después del descuento racional compuesto? Al pagaré se le aplicará una TNA de 0,12 con capitalización trimestral.

Solución
Con los datos P=1 000; i=0,12/4 y n=38/90; se calcula S.

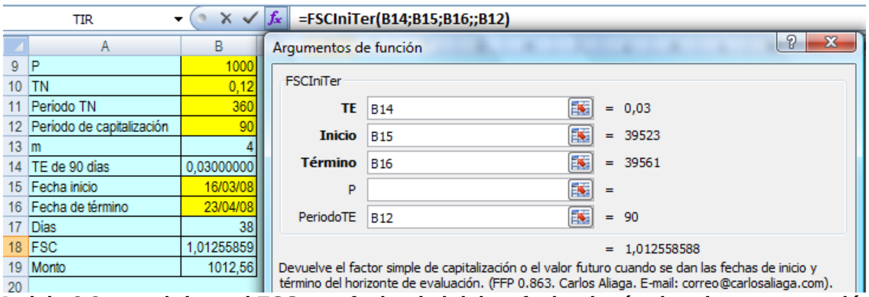


Figura 2.23 Modelo 2.3 que obtiene el FCS con fecha de inicio y fecha de término de una operación compuesta.

$S = P.FSC_{i;n}$ $\qquad S = 1\ 000\left(1+\frac{0{,}12}{360\div 90}\right)^{38/90}$

$$S = 1\ 000 \times 1{,}012558588 = 1\ 012{,}56$$

4. ¿Por qué monto tendrá que aceptarse un pagaré con vencimiento a 45 días si se necesita disponer de un valor presente de 5 000 um? En las operaciones de descuento el banco aplica una TEA de 0,2.

Solución
Con los datos P=5 000; TEA=0,2 y n=45/360; se calcula S.

$S = P.FSC_{i;n}$ $\qquad S = 5\ 000(1+0{,}2)^{45/360}$

$$S = 5\ 000 \times 1{,}023051875 = 5\ 115{,}26$$

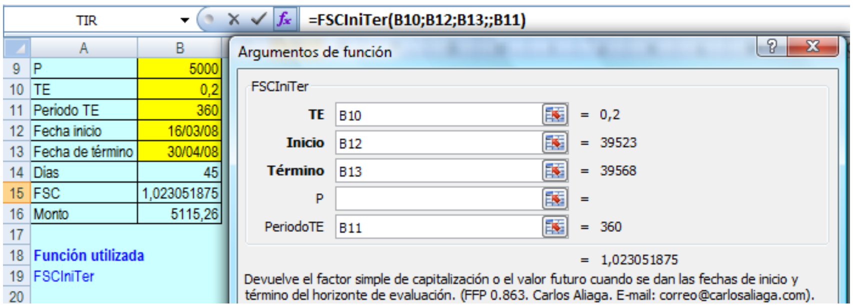


Figura 2.24 Modelo 2.4 que obtiene el FCS con fecha de inicio y fecha de término.

5. Una persona colocó en un banco los importes que se muestran en la siguiente tabla.

Fecha	23/06	26/06	10/7
Importes	300	400	200

Estos depósitos devengan una TNA de 0,18 con capitalización diaria. ¿Cuánto habrá acumulado el 2 de agosto del mismo año, fecha en que cancela la operación?

Solución
Existen muchas formas de plantear la ecuación de equivalencia financiera, una de ellas es capitalizar cada depósito durante el período comprendido entre la fecha del depósito y el día 40. La TED es 0,18/360=0,0005.

$$S = 300.FSC_{0{,}0005;40} + 400.FSC_{0{,}0005;37} + 200.FSC_{0{,}0005;23}$$

$$S = 306{,}06 + 407{,}47 + 202{,}31 = 915{,}84$$

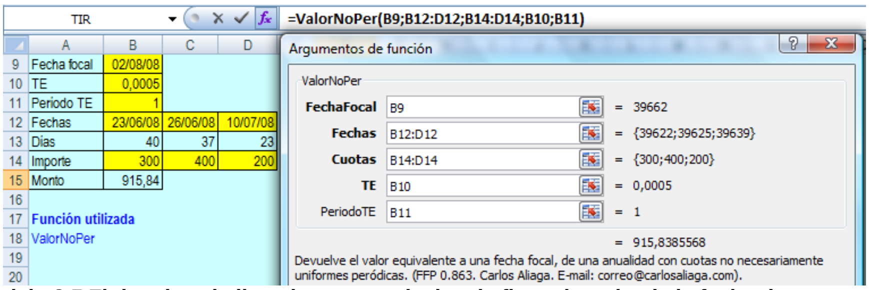


Figura 2.25 Modelo 2.5 Flujos de caja llevados por equivalencia financiera desde la fecha de su ocurrencia hasta la fecha focal o fecha de evaluación.

Para solucionar este problema se utilizó la FFP ValorNoPer que lleva los flujos de caja o rentas desde la fecha de su ocurrencia hasta una determinada fecha focal, que en el modelo 2.5 se ubica en la celda B9.

6. En el plazo de un trimestre se efectuarán en un banco depósitos quincenales de 1 000 um, los cuales percibirán una TNA de 0,36 capitalizable mensual-mente. Calcule el monto que se acumulará al final del trimestre.

Solución
Con los datos R=1000; $TEQ = 1{,}03^{15/30} - 1 = 0{,}014889157$ y n=6; se calcula S.

$S = R.FCS_{i;n}$ $$S = 1\,000\left[\frac{(1+0{,}014889157)^6 - 1}{0{,}014889157}\right]$$

$$S = 1\,000 \times 6{,}227820894 = 6\,227{,}82$$

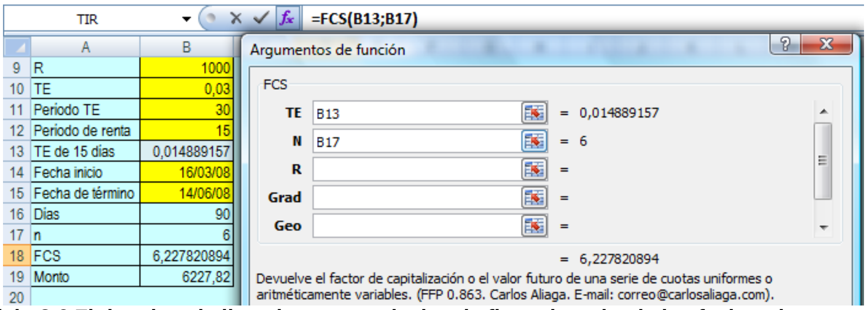


Figura 2.26 Modelo 2.6 Flujos de caja llevados por equivalencia financiera desde las fechas de su ocurrencia hasta el final del horizonte temporal.

7. Indumar S.A. y Peruexport S.A. celebraron un contrato por medio del cual la primera alquila a la segunda un terreno por un período de dos años y una renta de 500 um, que deberá depositar a fin de cada mes en una cuenta bancaria que le reportará a Indumar S.A. una TEA de 0,15. Si se asume que Peruexport S.A. cumplirá su compromiso ¿qué importe habrá acumulado Indumar S.A. al finalizar el contrato de alquiler?

Solución
Con los datos R=500; $TEM = 1{,}15^{30/360} - 1 = 0{,}011714917$ y n=24; se calcular S.

$S = R.FCS_{i;n}$ $$S = 500\left[\frac{(1+0{,}011714917)^{24} - 1}{0{,}011714917}\right]$$

$$S = 500 \times 27{,}52900445 = 13\ 764{,}50$$

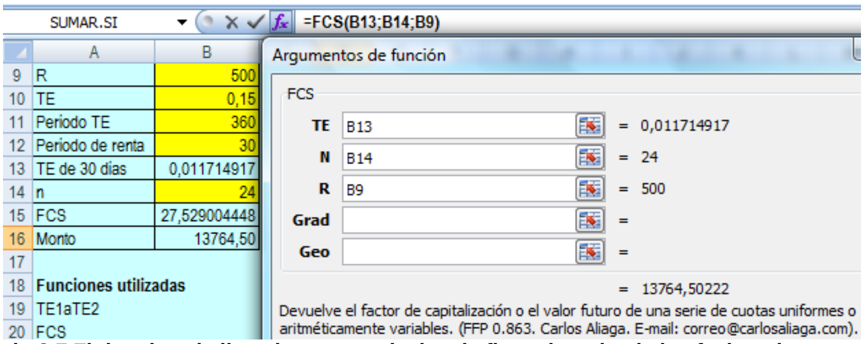


Figura 2.27 Modelo 2.7 Flujos de caja llevados por equivalencia financiera desde las fechas de su ocurrencia hasta el final del horizonte temporal.

8. En el mes de abril, la compañía SARA tuvo en su cuenta corriente bancaria los siguientes movimientos: efectuó depósitos vencidos de 2 000 um, los días 4 y 8 y 3 000 um los días 12, 16 y 20; asimismo efectúo retiros vencidos de 1 000 um los días 12, 16 y 20. Calcule el saldo de la cuenta corriente en la fecha de la última transacción, si los saldos deudores generan una TEM de 0,04 y los saldos acreedores devengan una TEM de 0,03?

Solución
Los diagramas de flujo de caja bruto y neto son los siguientes:

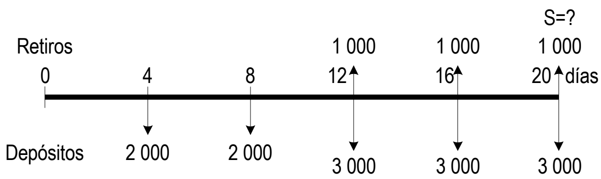


Diagrama de flujo de caja bruto.

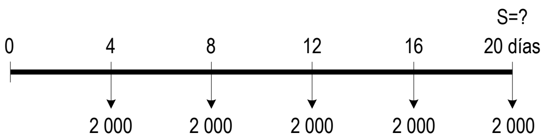


Diagrama de flujo de caja neto.

Con los datos R=2 000; $TE_{4días} = 1{,}03^{4/30} - 1 = 0{,}00394895$ y n=5; se calcular S.

$S = R.FCS_{i;n}$ $\qquad S = 2\ 000\left[\frac{(1+0{,}00394895)^5 - 1}{0{,}00394895}\right]$

$$S = 2\ 000 \times 5{,}039645749 = 10\ 079{,}29$$

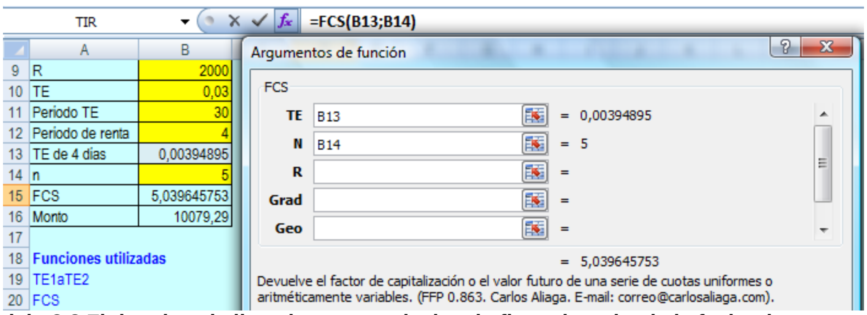


Figura 2.28 Modelo 2.8 Flujos de caja llevados por equivalencia financiera desde la fecha de su ocurrencia hasta el final del horizonte temporal.

Cálculo de P

9. Hoy se propone cancelar una deuda de 4 000 um que vence dentro de 45 días con un pago de 3 800 um. ¿Es conveniente para el acreedor esta propuesta, si su costo de oportunidad es una TEM de 0,05?

Solución
Con los datos S=4 000; TEM=0,05 y n=45/30; se calcula P.

$P = S.FSA_{0,05;45/30}$ $\qquad P = 4\ 000 \times 1{,}05^{-45/30}$

$$P = 4\ 000 \times 0{,}9294286413 = 3\ 717{,}71$$

Si el costo de oportunidad es una TEM de 0,05, entonces la propuesta de la cancelación de la deuda hoy es conveniente, ya que su valor presente es 3 717,71 um y el deudor propone cancelarla con 3 800 um.

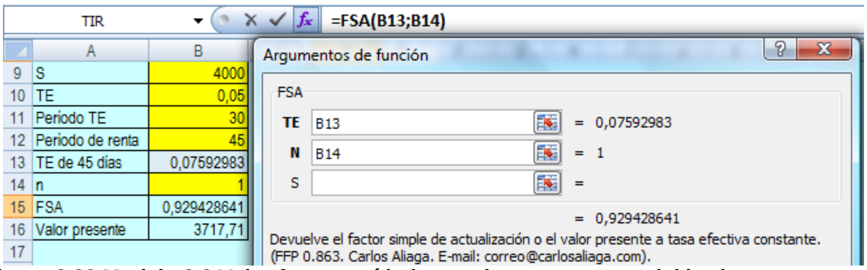


Figura 2.29 Modelo 2.9 Valor futuro traído hasta el momento cero del horizonte temporal.

10. Una letra de cambio con valor nominal de 2 000 um que vence el 11 de noviembre, se descontó el 24 de setiembre del mismo año, con una TEM de 0,05. ¿Qué importe neto abonará el banco en la cuenta corriente del descontante?

Solución
Con los datos S=2 000; TEM=0,05 y n=48/30; se calcula P.

$P = S.FSA_{0,05;1,6}$ $\quad P = 2\ 000 \times 1{,}05^{-48/30} = 2\ 000 \times 0{,}9249049878 = 1\ 849{,}81$

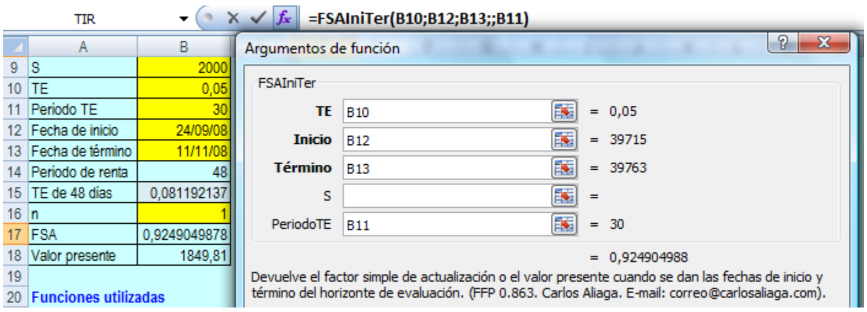


Figura 2.30 Modelo 2.10 Valor futuro traído hasta el momento cero del horizonte temporal con el FSA.

11. Calcule el importe por colocar hoy en un banco que permitirá retirar durante 5 meses (a fin de cada mes) una renta de 900 um. Esta colocación devenga una TEM de 0,03.

Solución
Con los datos R = 900; TEM = 0,03 y n = 5; se calcula P.

$P = R.FAS_{0,03;5}$ $\qquad P = 900\left[\frac{0{,}03(1+0{,}03)^5}{(1+0{,}03)^5-1}\right] = 900 \times 4{,}579707187 = 4\ 121{,}74$

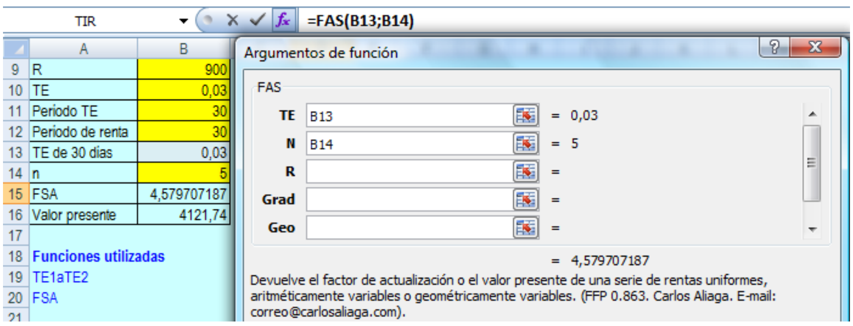


Figura 2.31 Modelo 2.11 Valor presente de una anualidad simple vencida.

12. En un concurso de precios llevado a cabo para la adquisición de una máquina industrial, los proveedores presentaron las siguientes propuestas:

Proveedor	**Fechas de pago**				
	11/07	**10/08**	**09/09**	**09/10**	**08/11**
A	4 000	3 000	3 000	3 000	3 000
B	3 000	3 250	3 250	3 250	3 250

Estas propuestas implican el pago de la cuota inicial (el 11/07) y cuotas mensuales vencidas durante 4 meses consecutivos. ¿Cuál es la mejor propuesta si se considera una TEA de 0,15?

Solución

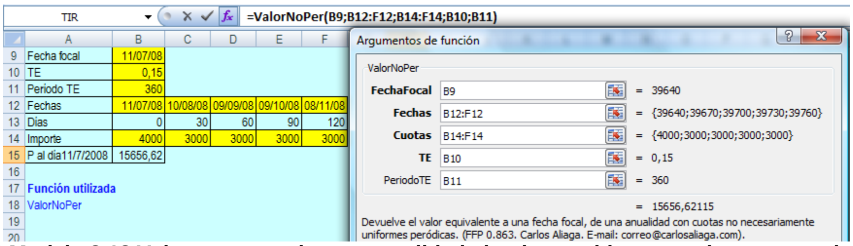


Figura 2.32 Modelo 2.12 Valor presente de una anualidad simple vencida con un importe en el momento 0.

La mejor propuesta es aquella que tiene el menor valor presente de los costos. La TEM es $0{,}011714917 = 1{,}15^{30/360} - 1$

$$VP_A = 4\,000 + 3\,000 FAS_{0{,}011714917;4} \qquad VP_B = 3\,000 + 3\,250 FAS_{0{,}011714917;4}$$

$$VP_A = 4\,000 + 3\,050 \times 3{,}885540382 \qquad VP_B = \ 3\,000 + 3\,250 \times 3{,}885540382$$

$$VP_A = 15\,656{,}62 \qquad VP_B = 15\,628{,}01$$

La mejor propuesta es la alternativa B con un costo presente de 15 628,01 um.

13. En el proceso de adquisición de una máquina, se recibieron las siguientes propuestas:

  a. Al contado por 10 000 um.
  b. Al crédito con una cuota inicial de 2 000 um, amortizable en medio año con cuotas mensuales vencidas de 1 500 um.

¿Qué opción escogería si el costo del dinero es una TET de 0,05?

Solución
La mejor propuesta es la del menor valor presente entre la compra al contado y la compra financiada; la TEM es $0{,}016396357 = 1{,}05^{30/90} - 1$.

$$P = 2\,000 + 1\,500.FAS_{0{,}016396357;6}$$

$$P = 2\,000 + 1\,500 \times 5{,}67019385 = 10\,505{,}29$$

La mejor alternativa es comprarla al contado con un costo de 10 000 um.

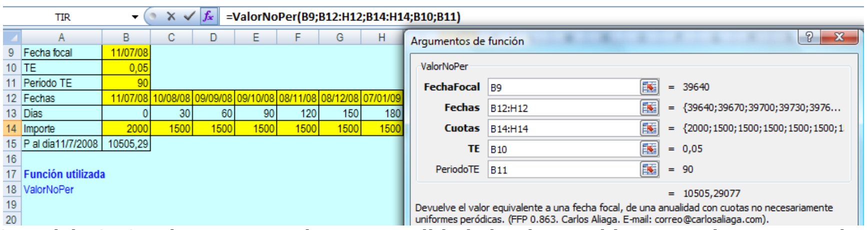


Figura 2.33 Modelo 2.13 Valor presente de una anualidad simple vencida con un importe en el momento 0.

Cálculo de las rentas uniformes vencidas R

14. Si en el plazo de 15 meses requiere acumularse un fondo de 5 000 um, al efectuar depósitos uniformes cada fin de trimestre en un banco que remunera al fondo con una TEM de 0,03, ¿cuál es el importe de cada depósito?

Solución

Con los datos S=5 000; $TET = 1{,}03^3 - 1 = 0{,}092727$ y n=5; se calcula R.

$$R = S.FDFA_{0{,}092727;5} \qquad R = 5\,000\left[\frac{0{,}092727}{1{,}092727^5 - 1}\right]$$

$$R = 5\,000 \times 0{,}1661871236 = 830{,}94$$

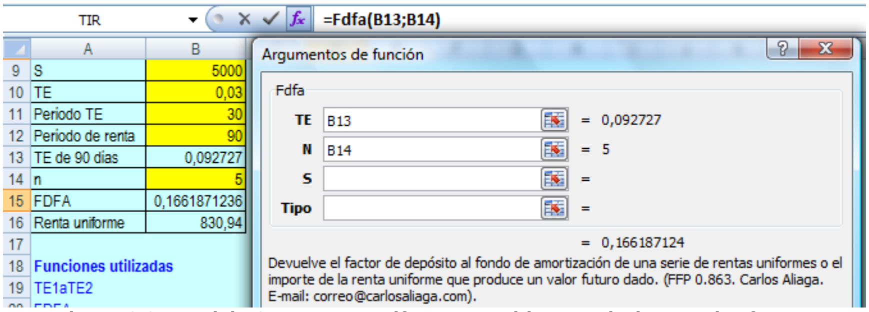


Figura 2.34 Modelo 2.14 Renta uniforme vencida a partir de un valor futuro.

15. Para acumular 9 000 um en el plazo de dos años una empresa decidió efectuar depósitos uniformes cada fin de mes en un banco que remunera a los ahorros con una TEC (cuatrimestral) de 0,04. ¿Cuánto es el importe de cada depósito mensual?

Solución

Con los datos S=9 000; $TEM = 1{,}04^{30/120} - 1 = 0{,}009853407$ y n=24; se calcula R.

$$R = S.FDFA_{0{,}009853407;24} \qquad R = 9\,000\left[\frac{0{,}009853407}{1{,}009853407^{24} - 1}\right]$$

$$R = 9\,000 \times 0{,}037137957 = 334{,}24$$

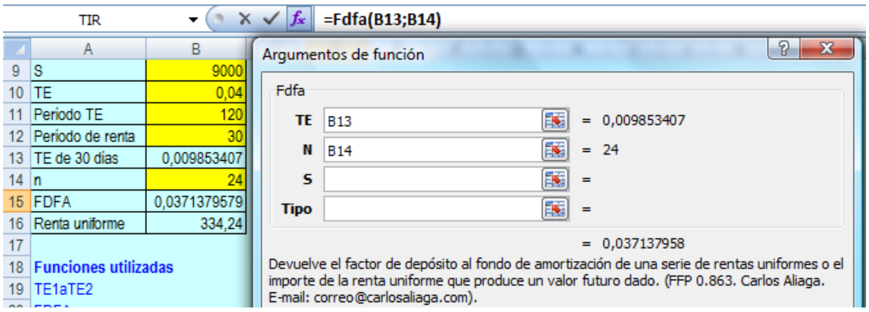


Figura 2.35 Modelo 2.15 Renta uniforme vencida a partir de un valor futuro.

16. Calcule la cuota uniforme trimestral que amortizará un préstamo de 8 000 um en el plazo de dos años. El préstamo devenga una TNA de 0,24 capitalizable trimestralmente.

Solución

Con los datos P=8 000; $TET = 0{,}24 \div 4 = 0{,}06$ y n=8; se calcula R.

$$R = P.FRC_{0{,}06;8} \qquad R = 8\,000\left[\frac{0{,}06 \times 1{,}06^8}{1{,}06^8 - 1}\right]$$

$$R = 8\,000 \times 0{,}161035942 = 1\,288{,}29$$

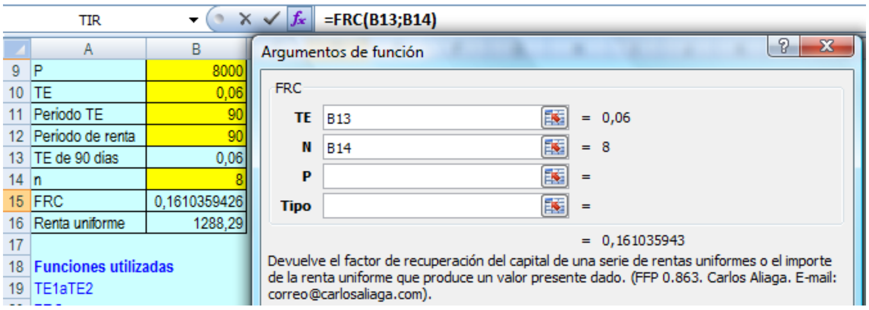


Figura 2.36 Modelo 2.16 Renta uniforme vencida a partir de un valor presente.

17. Un automóvil cuyo precio al contado es 10 000 um se vende al crédito con una cuota inicial de 35%, amortizable en el plazo de un año con cuotas uniformes mensuales vencidas. Calcule el importe de la cuota uniforme si el financiamiento genera una TET de 0,03.

Solución

Con los datos P=6 500; $TEM = 1{,}03^{30/90} - 1 = 0{,}009901634$ y n=12; se calcula R.

$$R = P.FRC_{0,009901634;12} \qquad R = 6\,500\left[\frac{0{,}009901634 \times 1{,}009901634^{12}}{1{,}009901634^{12} - 1}\right]$$

$$R = 6\,500 \times 0{,}088793578 = 577{,}16$$

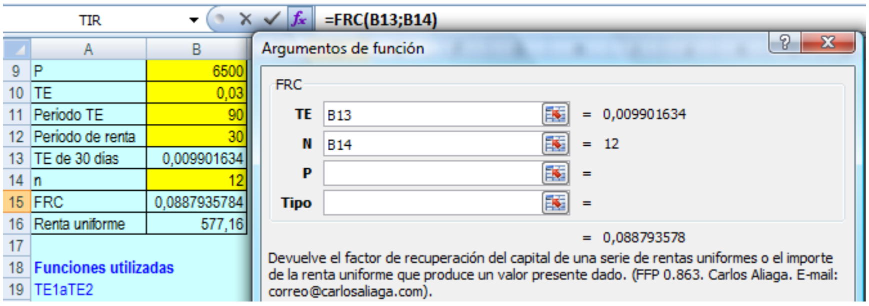


Figura 2.37 Modelo 2.17 Renta uniforme vencida a partir de un valor presente.

Cálculo del número de rentas n

18. ¿Con cuántas cuotas uniformes puede cancelarse un préstamo bancario de 15 000 um, que genera una TNA de 0,24 capitalizable trimestralmente si se efectúan pagos de 2 000 um cada fin de trimestre?

Solución

Con los datos P=15 000; $TET = 0{,}24 \div 4 = 0{,}06$ y R=2 000; se calcula n.

$$n = -\frac{Log\left[1 - \frac{Pi}{R}\right]}{Log(1+i)} \qquad n = -\frac{Log\left[1 - \frac{15\,000 \times 0{,}06}{2\,000}\right]}{Log(1+0{,}06)} = \frac{Log\ 0{,}55}{Log\ 1{,}06} = 10{,}25996573$$

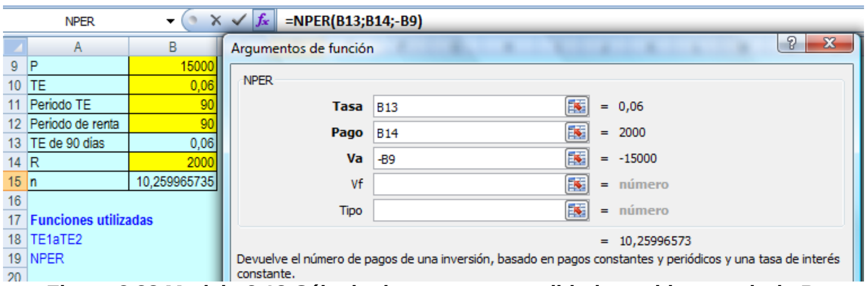


Figura 2.38 Modelo 2.18 Cálculo de n en una anualidad vencida a partir de P.

19. Se necesita adquirir una máquina cuyo costo se estima será 8 000 um en la fecha que se compre. ¿Dentro de cuántos meses podrá disponerse de ese importe, si se ahorra cada fin de mes un importe uniforme de 1 800 um en una institución financiera que remunera los ahorros con una TEM de 0,02? Si n fuese un número no entero, indique la fecha del pago de la última cuota y su respectivo importe.

Solución

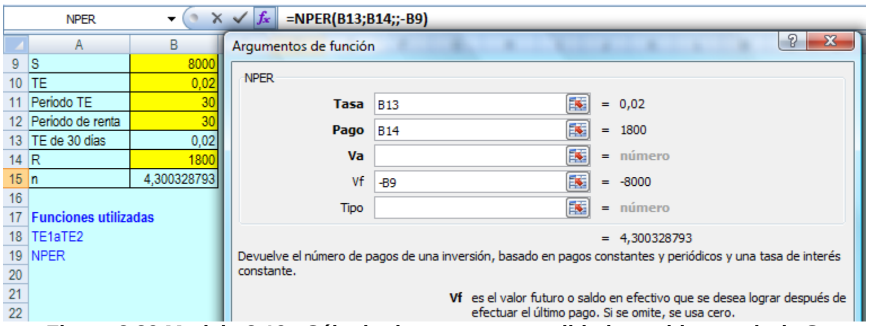


Figura 2.39 Modelo 2.19a Cálculo de n en una anualidad vencida a parir de S.

Con los datos S=8 000; TEM=0,02 y R=1 800; se calcula n.

$$n = \frac{Log\left[\frac{Si}{R}+1\right]}{Log(1+i)} \qquad n = \frac{Log\left[\frac{8\,000\times 0{,}02}{1\,800}+1\right]}{Log(1+0{,}02)} = \frac{Log\ 1{,}088888889}{Log\ 1{,}02} = 4{,}300328793$$

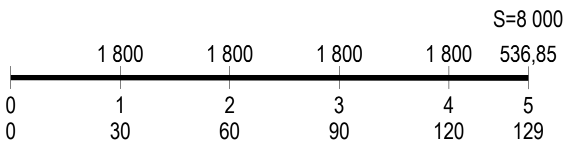
Como n es un número no entero y las cuotas se pagan cada 30 días, la fecha de pago de la última cuota (la quinta), debe pagarse el día 129=4,300328793 × 30 y su importe en esa fecha se calcula con la siguiente ecuación de equivalencia financiera.

$$1\,800\left[\frac{(1+0{,}02)^4-1}{0{,}02}\right]\times 1{,}02^{0{,}300328793} + R_5 \;=8\,000$$

$$7\,463{,}148249 + R_5 = 8\,000$$

$$R_5 = \;536\,8517506$$

Esto significa que el fondo se acumulará con 5 rentas, 4 rentas mensuales de 1 800 um y la quinta que vence 9 días después de la cuarta renta, cuyo importe es 536,85 um y debe colocarse el día 129, lo que permitirá acumular el fondo de 8 000 um. Con estos datos el diagrama de la anualidad general, y la verificación del valor futuro con estos datos, se presenta a continuación.



$$1\,800 FCS_{0{,}02;4} FSC_{0{,}000660305;9} + 536{,}85 = \; S$$

$$7\,463{,}148249 + 536{,}85 = \;8\,000$$

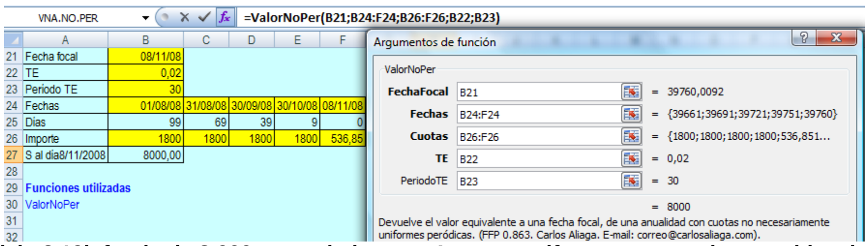


Figura 2.40 Modelo 2.19b fondo de 8 000 acumulados con 4 rentas uniformes mensuales vencidas de 1 800 um y una de 536,85 um al final del horizonte temporal.

Cálculo de i (TIR) en una anualidad simple

20. La compañía Corsa, por campaña de navidad, ofrece la venta de televisores en las siguientes condiciones:

Modelo	Contado	4 Cuotas	6 Cuotas
SR14	440,75 um	116,75 um	80 um

¿Cuál es la TEA de las alternativas al crédito? Suponga que la compra se efectúa a plazos, las cuotas son mensuales, y la primera de ellas es la cuota inicial.

Solución

Cuatro cuotas: P=440,75–116,75=324; R=116,75; n=3

$$324=\frac{116,75}{(1+i)^1}+\frac{116,75}{(1+i)^2}+\frac{116,75}{(1+i)^3} \qquad (1)$$

$$324= 116,75\left[\frac{(1+i)^3-1}{i(1+i)^3}\right] \qquad (2)$$

La ecuación (1) es de grado 3 que no tiene solución algebraica, por lo tanto se asignarán valores a i hasta conseguir que el segundo miembro sea 324; para este proceso se utilizarán las fórmulas del FAS y la interpolación lineal.

i	FAS	Valor presente
0,035	2,8016370	327,09
0,041	2,7698324	323,78

En el cuadro anterior se observa que la tasa i es mayor que 0,035 pero menor que 0,041; por lo tanto se interpolará entre estos dos valores para hallar su valor aproximado.

Al hacer

$$x_1= 0,035 \qquad y_1= 327,09$$
$$x= ? \qquad y= 324,00$$
$$x_2= 0,041 \qquad y_2= 323,78$$

Y al aplicar la fórmula (2.8) se tiene:

$$x= x_1+\frac{y-y_1}{y_2-y_1}(x_2-x_1)$$

$$x= 0,035+\frac{324-327,09}{323,78-327,09}(0,041-0,035)$$

$$x= 0,0406$$

La tasa aproximada linealmente al verdadero valor de i es 0,0406. La TEM calculada con la función TIR es 0,0399868. Para obtener la respuesta al problema planteado, debe hallarse la TEA a partir de la TEM calculada.

$TEA=(1+TEM)^{360/30}-1 \qquad TEA=1,0399868^{360/30}-1=0,6007882$

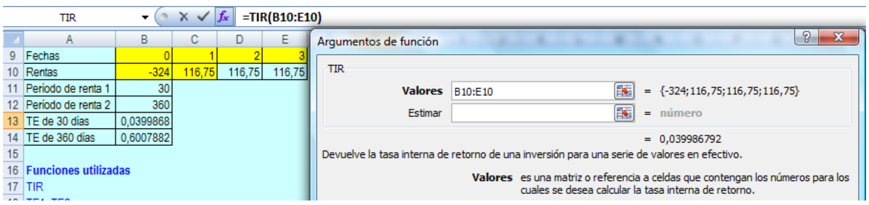


Figura 2.41 Modelo 2.20 tasa de interés en una anualidad simple que se obtuvo con la función TIR.

Seis cuotas: P=440,75–80=360,75; R=80; n=5

Con un proceso similar se llega a la conclusión que la TEM de la segunda alternativa es 0,0354444 y la TEA es 0,5188734. En conclusión la mejor alternativa es el crédito en seis cuotas.

Cálculo del fsc con variaciones de tasa

21. Calcule el FSC para una operación a interés compuesto que se inició el 28 de marzo y se canceló el 2 de setiembre del mismo año. La TEA vigente al inicio de la operación fue 0,12; esta tasa varió a una TET de 0,028 el 10 de mayo, y a una TEM de 0,01 el 2 de julio; esta última tasa estuvo vigente hasta el término de la operación.

Solución

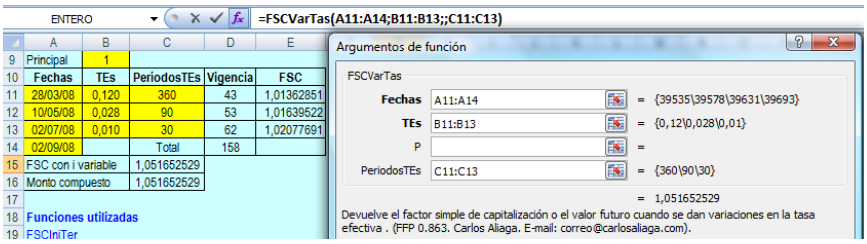


Figura 2.42 Modelo 2.21 FSC con variaciones en la tasa efectiva que se obtuvo con la función FSCVarTas.

Con los datos TEA_1=0,12; TET_2=0,028; TEM_3=0,01; n_1=43/360; n_2=53/90; n_3=62/30; se calcula el FSC.

$$FSC = (1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}(1+i_3)^{n_3}$$

$$FSC = (1+0{,}12)^{43/360}(1+0{,}028)^{53/90}(1+0{,}01)^{62/30} = 1{,}051652529$$

Cálculo del fsa con variaciones de tasa

22. En el período comprendido entre el 15 de marzo y 10 de octubre del mismo año, estuvieron vigentes las tasas efectivas que se muestran en el siguiente cuadro.

A partir del	15/03	08/05	15/07
Tasa efectiva	TEM=0,012	TET=0,036	TEA=0,15

Con los datos anteriores calcule el FSA que permite obtener el valor actual (en la fecha 15 de marzo), de un flujo de caja de 10 000 um que se realizará el 10 de octubre.

Solución

Con los datos TEM_1=0,012; TET_2=0,036; TEA_3=0,15; n_1=54/30; n_2=68/90; n_3=87/360; se calcula el FSA.

$$FSA = (1+i_1)^{-n_1}(1+i_2)^{-n_2}(1+i_3)^{-n_3}$$

$$FSA = (1+0{,}012)^{-54/30}(1+0{,}036)^{-68/90}(1+0{,}15)^{-87/360} = 0{,}921300452$$

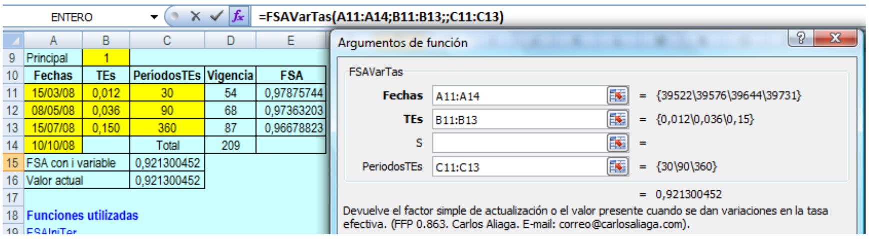


Figura 2.43 Modelo 2.22 FSA con variaciones en la tasa efectiva que se obtuvo con la función FSAVarTas.

2.10 Listado de fórmulas

Fórmula	Obtiene
$S = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$	(2.1a) Monto o Valor futuro de una anualidad simple vencida. El término entre corchetes es el FCS.
$S = R.FCS_{i;n}$	(2.1b) Monto o Valor futuro de una anualidad simple vencida con el FCS vencido.
$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$	(2.2a) Valor presente de una anualidad simple vencida. El término entre corchetes es el FAS.
$P = R.FAS_{i;n}$	(2.2b) Valor presente de una anualidad simple vencida con el FAS vencido.
$R = S\left[\frac{i}{(1+i)^n-1}\right]$	(2.3a) Renta uniforme vencida a partir de S. El término entre corchetes es el FDFA.
$R = S.FDFA_{i;n}$	(2.3b) Renta uniforme vencida a partir de S con el FDFA vencido.
$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$	(2.4a) Renta uniforme vencida a partir de P. El término entre corchetes es el FRC.
$R = P.FRC_{i;n}$	(2.4b) Renta uniforme vencida a partir de P con el FRC vencido.
$n = -\frac{Log\left[1-\frac{Pi}{R}\right]}{Log(1+i)}$	(2.5) Número de períodos de renta de una anualidad simple vencida a partir de P.
$n = \frac{Log\left[\frac{Si}{R}+1\right]}{Log(1+i)}$	(2.6) Número de períodos de renta de una anualidad simple vencida a partir de S.
$I_0 = \sum_{t=1}^{n}\frac{FC_t}{(1+i)^t}$	(2.7a) Cálculo de i (TIR) en una anualidad simple vencida.
$\sum_{t=1}^{n}\frac{FC_t}{(1+i)^t} - I_0 = 0$	(2.7b) Cálculo de i (TIR) en una anualidad simple vencida.
$x = x_1 + \frac{y-y_1}{y_2-y_1}(x_2 - x_1)$	(2.8) Fórmula de interpolación lineal.
$S = P(1+i)^n$	(2.9a) Valor futuro de un principal.
$S = P.FSC_{i;n}$	(2.9b) Valor futuro de un principal con el FSC.
$P = S(1+i)^{-n}$	(2.10a) Valor presente de un valor futuro.
$P = S.FSA_{i;n}$	(2.10b) Valor presente de un valor futuro con el FSA.

Preguntas de autoevaluación

1. Mencione 6 funciones financieras personalizadas que efectúan transforma-ciones financieras al utilizar los factores financieros; comente sus argumentos y lo que devuelve cada una de esas funciones.

2. ¿Qué es un factor financiero y cómo se obtiene?

3. Qué factores financieros se utilizan para convertir:

   - Un valor presente, en un valor futuro equivalente.
   - Un valor futuro, en un valor presente equivalente.
   - Un valor presente, en rentas uniformes vencidas equivalentes.
   - Un valor futuro, en rentas uniformes vencidas equivalentes.
   - Rentas uniformes vencidas, en un valor presente equivalente.
   - Rentas uniformes vencidas, en un valor futuro equivalente.

Escriba las fórmulas de cada uno de los factores financieros.

4. Demuestre la fórmula del FCS. ¿Qué es el FCS?

5. Si el valor de la tasa i aumenta pero n permanece constante ¿qué sucede con el FCS? Ponga un ejemplo.

6. Demuestre la fórmula del FAS. ¿Qué es el FAS?

7. Si el valor de la tasa i aumenta pero n permanece constante ¿qué sucede con el FAS? Ponga un ejemplo.

8. Demuestre la fórmula del FDFA. ¿Qué es el FDFA?

9. Si el valor de la tasa i aumenta pero n permanece constante ¿qué sucede con el FDFA? Ponga un ejemplo.

10. Demuestre la fórmula del FRC. ¿Qué es el FRC?

11. Si el valor de la tasa i aumenta pero n permanece constante ¿qué sucede con el FRC? Ponga un ejemplo.

12. Demuestre la fórmula de n a partir de P.

13. Demuestre la fórmula de n a partir de S.

14. Cuando se calcula el número de rentas de una anualidad, su valor puede ser un número entero, o un número no entero; en este último caso, ¿cómo se interpreta este resultado? Ponga un ejemplo cuando se obtiene n a partir de P y un ejemplo cuando n se obtiene a partir de S, en ambos casos el valor de n debe ser un número no entero. Aplique las alternativas comentadas anteriormente.

15. Si usted puede invertir 100 000 um durante 8 meses a interés simple con una TNA de 0,12; o, a interés compuesto con una TEA de 0,12. ¿Qué alternativa escogería? Justifique su respuesta.

Problemas propuestos

1. Transformaciones financieras

1. Con una TEM de 0,01 y un horizonte temporal de 10 meses con rentas mensuales vencidas de 1 um, obtenga los valores de los siguientes factores vencidos: FSC, FSA, FRC, FAS, FCS y FDFA.

2. Con una TEA de 0,12682503 obtenga los valores de los factores: FSC, FSA, FRC, FAS, FCS y FDFA. El horizonte temporal se inicia el 8 de marzo y termina el 4 de setiembre del mismo año, y los períodos de renta son de 30 días. Realice nuevamente los cálculos anteriores, pero ahora utilice una TEA de 0,19561817 y determine si dichos factores aumentaron o disminuyeron. Emita sus conclusiones con relación a las variaciones observadas en los factores financieros.

3. Efectúe las seis transformaciones financieras equivalentes entre stocks y flujos de efectivo, con un capital inicial de 5 000 um, una TNA de 0,24 con capitalización mensual y 5 rentas uniformes trimestrales vencidas.

4. Con una TEM de 0,03, un horizonte temporal de 2 años y rentas uniformes mensuales vencidas, calcule los valores de los 6 factores financieros.

5. Con una TEM de 0,01 y 8 cuotas trimestrales uniformes vencidas, calcule los valores de los 6 factores financieros.

6. Un sobregiro bancario que devenga una TEA de 0,12 estuvo vigente desde el 31 de octubre al 5 de noviembre del mismo año. Calcule el FSC de esa operación.

7. Un flujo de caja que se recibirá el 10 de octubre, se descuenta el 11 de julio del mismo año, con una TEA de 0,08. Calcule el FSA que se aplicará a esa operación.

8. Calcule el FSC de una operación cuya fecha de inicio fue el 10 de abril y su fecha de término el 28 de setiembre del mismo año. En ese período de tiempo estuvieron vigentes las siguientes tasas de interés.

A partir del	10/04	08/05	30/07
Tasa efectiva	TEM=0,01	TET=0,03	TEA=0,12

9. Calcule el FSA que se aplicará a una operación que estuvo vigente desde el 24 de setiembre hasta el 28 de diciembre del mismo año. En ese período la TEM vigente de 0,01 varió a una TET de 0,03 a partir del 11 de octubre y a una TEA de 0,12 a partir del 30 de noviembre que se mantuvo hasta el final del horizonte temporal.

2. Monto de una anualidad simple vencida

10. Una persona deposita en una cuenta de ahorros al final de cada trimestre una renta uniforme de 2 000 um. ¿Qué monto acumulará en el plazo de dos años si percibe una TNA de 0,24 capitalizable trimestralmente? Si los datos anteriores se mantienen, pero ahora la TNA ahora se capitaliza bimestralmente, ¿cuál es el nuevo monto?

11. ¿Cuánto puede acumularse durante 3 años consecutivos, si se deposita en un banco 1 000 um cada fin de mes, y se percibe una TNA de 0,12 con capitalización trimestral? Si los datos anteriores se mantienen, pero el depósito uniforme se incrementa a 1 200 um, ¿cuánto es el nuevo monto?

12. ¿Cuánto es el monto al final de un año, si en ese plazo se efectúan depósitos de 2 500 um al final de cada 45 días en una institución bancaria; estos depósitos devengan una TNA de 0,18 con capitalización trimestral? Si los datos anteriores se mantienen, pero la capitalización fuese bimestral ¿cuánto es el nuevo monto?

13. ¿Qué monto se acumulará en una cuenta de ahorros si a fin de mes y durante 8 meses consecutivos, se depositan 800 um en un banco? Estos depósitos devengan una TEA de 0,12.

14. Durante el plazo de dos años consecutivos se efectuaron depósitos trimestrales vencidos de 4 000 um; estos depósitos devengan una TEC (tasa efectiva cuatrimestral) de 0,03. ¿Cuánto es el monto que se acumuló al final del tercer año? fecha en que se canceló la operación.

15. Una persona que debe pagar un importe de 500 um cada 5 días, acuerda con su acreedor efectuar dichos pagos cada 30 días. Si esta operación devenga una TEA de 0,1 ¿cuánto es el importe de los pagos mensuales (30 días)?

3. Valor presente de una anualidad simple vencida

16. En el proceso de adquisición de una maquina se recibieron de los proveedores las siguientes propuestas:
    a. Al contado por 10 000 um.
    b. Al crédito con una cuota inicial de 4 000 um y seis cuotas mensuales de 1 100 um cada una.

¿Qué propuesta aceptaría usted si el costo del dinero es una TEM de 0,04 y no tiene restricción de capital?

17. Un préstamo bancario que devenga una TNA de 0,24 capitalizable trimestral-mente se pactó para cancelarse en el plazo de 5 años con cuotas trimestrales uniformes vencidas de 250 um. Se cumplió puntualmente con los pagos, y al vencimiento de la duodécima cuota se decide cancelarla junto con las cuotas insolutas, con la condición que éstas se descuenten con la misma tasa pactada. ¿Cuánto es el importe por pagar en esa fecha que incluye la cuota 12?

18. Una máquina se vende con una cuota inicial de 2 000 um y 12 cuotas de 300 um cada una a pagarse cada 30 días. Calcule su respectivo valor presente equivalente con una TET de 0,05.

19. Calcule el valor presente de una anualidad de 20 rentas uniformes vencidas de 2 000 um cada una; utilice una TEM de 0,02. La primera renta se pagará dentro de tres meses y las siguientes en períodos de 3 meses cada una.

20. La empresa Alfa alquila un local comercial durante 5 años por una merced conductiva de 3 000 um por trimestre vencido. Alfa recibe como alternativa del arrendatario la propuesta de efectuar un único pago de 40 000 um al inicio del contrato por cinco años. Si Alfa puede invertir ese importe que redime una TEM de 0,01 ¿le conviene la alternativa propuesta?

21. Un departamento se oferta para su venta con las siguientes alternativas:

    a. 17 500 um al contado.
    b. 10 000 um de cuota inicial y un pago de 7 700 um dentro de 60 días.
    c. 8 000 um de cuota inicial y pagos de 6 000 um y 3 680 um, y cada uno se realizará dentro de 30 días y de 60 días, respectivamente.
    d. 6 000 um de cuota inicial y pagos de 4 000 um dentro de 30, 60, y 90 días, respectivamente.

    ¿Cuál es la mejor alternativa para un cliente cuyo costo de oportunidad es una TEM de 0,02?

22. Una nueva máquina de producción permitirá ahorrar en costos de producción un importe mensual de 1 200 um durante 3 años consecutivos. Con una TEA de 0,12 calcule el valor presente de dichos ahorros de costos.

4. Renta uniforme vencida a partir de S

23. Calcule el importe de la renta uniforme que colocada al final de cada trimestre durante 4 años permite constituir un monto de 20 000 um. La TNA aplicable es 0,36 con capitalización mensual.

24. La empresa Productos Industriales S.A planea adquirir dentro de seis meses un equipo de computación interconectado para toda su empresa a un precio de 10 000 um. Con este objetivo, la gerencia financiera puede colocar sus excedentes mensuales de caja (estimados en 3 000 um) en una institución financiera que los remunera con una TEM de 0,02.

    a. ¿Qué importe uniforme de fin de mes deberá ahorrar para acumular las 10 000 um al final del sexto mes?
    b. ¿Cuánto es el importe del interés que se acumulará al final del horizonte temporal?
    c. Si la TEM de 0,02 cambia a una TET de 0,03 ¿cuánto es el nuevo importe del ahorro mensual para acumular el monto de 10 000 um?

25. Se planea reemplazar una máquina dentro de 4 meses, cuyo precio se estima que en dicha fecha será 5 000 um. ¿Qué importe uniforme de fin de mes deberá depositarse durante ese plazo en un banco que ofrece una TEM de 0,01, a fin de comprar dicha máquina con los depósitos capitalizados?

26. Un préstamo de 5 000 um se contrata en el Banco del Oriente para devolver el principal dentro de un año y pagar trimestralmente sólo los intereses que son devengados por una TET de 0,08. El prestatario, para cancelar el principal a su vencimiento, desea acumular un fondo y para ello efectúa depósitos uniformes trimestrales en el Banco del Sur, estos depósitos devengan una TEM de 0,02. Calcule la cuota uniforme trimestral total que permita acumular el fondo de 5 000 um al final del año, y pagar los intereses trimestrales durante ese plazo.

5. Renta uniforme vencida a partir de P

27. Un préstamo de 10 000 um que devenga una TNA de 0,18 capitalizable mensualmente, debe amortizarse en el plazo de un año con cuotas uniformes mensuales vencidas. Calcule el importe de esa cuota uniforme.

28. La empresa Equipos S.A. vende sus máquinas al contado en 10 000 um, pero debido a que consiguió un financiamiento del exterior planea efectuar ventas al crédito con una cuota inicial de 4 000 um y seis cuotas uniformes con vencimiento a 30 días cada una. Con una TEA de 0,25 calcule el importe de las cuotas del programa de ventas a plazo.

29. Se compró un automóvil cuyo precio de contado fue 12 000 um, se pagó por este motivo una cuota inicial de 2 000 um y el saldo amortizable en el plazo de 4 meses se realizó con cuotas uniformes mensuales vencidas. ¿Cuánto es el importe de las cuotas si el financiamiento devenga una TET de 0,02?

30. Calcule la cuota uniforme del financiamiento de una máquina que se vende al contado a un precio de 4 000 um. Al crédito se otorgará con una cuota inicial equivalente al 25% del precio de contado, y cuotas uniformes mensuales vencidas en un plazo de medio año. El financiamiento devenga una TEA de 0,15 sobre el saldo deudor.

31. En el proceso de adquisición de una máquina, una empresa recibe las siguientes propuestas:

Propuestas	A	B
Vida útil (años)	10	12
Precio de contado um	5 000	5 800

¿Cuál es la propuesta más conveniente si el costo de oportunidad es una TEA de 0,15?

32. Un préstamo de 20 000 um que devenga una TNA de 0,18 capitalizable bimestralmente, debe cancelarse en el pazo de seis años con cuotas cuatrimestrales uniformes vencidas. Calcule el importe de la cuota uniforme.

33. Se compró un departamento en 120 000 um, cuyo sistema de financiamiento consiste en una cuota inicial de 20 000 um, un plazo de 10 años en los cuales se harán pagos uniformes que vencerán cada 30 días. Si el préstamo devenga una TEA de 0,12:

    a. Calcule la cuota uniforme mensual.
    b. Determine la parte del interés y del principal de la primera cuota uniforme.

6. Cálculo de n a partir de P en una anualidad vencida

34. ¿Con cuántas cuotas uniformes de 1 787,98 um pagaderas cada fin de mes, se cancelará un préstamo de 20 000 um que devenga una TEA de 0,14?

35. ¿Cuántas cuotas mensuales vencidas de 1 617,29 um serán necesarias para cancelar un préstamo de 50 000 um? El préstamo devenga una TNA de 0,24 con capitalización trimestral.

36. Con el objeto de retirar 800 um cada 30 días, una persona deposita en un banco 10 000 um; este capital devenga una TEM de 0,02.

    a. ¿Cuántos retiros pueden realizarse? Si el número de retiros fuese un número no entero, diga en qué fecha debe retirarse la última cuota, y cuánto es su importe.
    b. Si el número de retiros fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato superior y calcule el importe del último retiro.
    c. Si el número de retiros fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato inferior y calcule su respectivo importe.

37. Una máquina cuyo precio al contado es 20 000 um, se compra al crédito. Se paga una cuota inicial 6 800 um y se amortiza con cuotas uniformes de 1 000 um que deben pagarse cada 30 días; este crédito devenga una TEM de 0,01.

    a. ¿Cuántos pagos deben efectuarse para cancelar la deuda? Si este fuese un número no entero, diga en qué fecha debe pagarse la última cuota (no entera), y cuánto es el importe por cancelar en esa fecha.
    b. Si el número de pagos fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato superior y calcule el importe del último pago.
    c. Si el número de pagos fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato inferior y calcule el importe del último pago.

7. Cálculo de n a partir de S en una anualidad vencida

38. ¿Con cuántos depósitos de 150 um que se realizan cada fin de quincena, se acumulará un monto de 1 901,85 um? Los depósitos devengan una TNA de 0,24 capitalizable mensualmente.

39. Se desea acumular un fondo de 22 600 um con depósitos mensuales vencidos de 2500 um; estos depósitos devengan una TEM de 0,01.

    a. ¿Cuántas rentas uniformes deben efectuarse para acumular dicho fondo? Si estas fuesen un número no entero, diga en qué fecha debe depositarse la última renta (no entera), y calcule el importe por depositar en esa fecha.

b. Si el número de rentas fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato superior y calcule el importe de la última renta.
c. Si el número de rentas fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato inferior y calcule el importe de la última renta.

8. Cálculo de i (TIR) en una anualidad vencida

40. Por campaña escolar una casa comercial ofrece "paquetes escolares" en productos, por un importe de 1 200 um y cobra una cuota inicial de 200 um y 11 cuotas mensuales de 120 um cada una. ¿Cuál es la TEM cargada en esta operación?

41. Calcule la TEM de una anualidad de 20 rentas trimestrales vencidas de 4 000 um cada una, cuyo valor presente es 28 991,68 um.

42. Un préstamo de 3 545 950 um debe amortizarse con cuotas uniformes trimestrales vencidas. Se cuenta con las siguientes alternativas:

    a. 4 cuotas de 1 000 000 um.
    b. 6 cuotas de 698 614,31 um.

    ¿Qué TET se aplicó en cada alternativa? Sobre la base del cálculo anterior ¿cuál sería su decisión?

43. Una persona depositó 100 um en su cuenta de capitalización de una administradora de fondos de pensiones (AFP), cada fin de mes durante 10 años. Al finalizar este plazo, la AFP le informó que su fondo acumulado era 16 247,34 um. ¿Cuál fue la TEA que rindió sus depósitos?

44. Un préstamo de 15 925,67 um se rembolsa con dos cuotas: la primera de 8 000 um al vencimiento del cuarto mes; y la segunda de 10 000 um al vencimiento del octavo mes. Calcule la TEM aplicada al préstamo. El cálculo debe efectuarlo directamente, sin tantear ni interpolar.

45. Una máquina herramienta tiene un precio al contado de 800 000 um; a crédito lo ofrecen con una cuota inicial de 300 000 um y el saldo amortizable en dos meses con cuotas mensuales de 265 076,81 um. ¿Qué TEA se está cargando en el financiamiento?

46. La compañía SIGA S.A. vende un artículo al contado en 150,03 um, pero al crédito si se "carga en cuenta" lo ofrece para pagarlo sin cuota inicial y dos cuotas iguales de 78 um que deben cancelarse dentro de 15 y 45 días cada una. ¿Qué TEM se aplicó en este programa de crédito?

47. Un automóvil Hyundai tiene un precio al contado de 11 690 um. A crédito puede adquirirse con una cuota inicial de 4 642 um y cuotas mensuales vencidas de 335,65 um. Si el plazo del crédito es dos años, ¿cuál es la TEM y TEA del financiamiento?

48. ¿Cuál es la TEM que carga el Banco Mercante por el financiamiento de un préstamo de 20 000 um, amortizable en el plazo de cuatro meses con cuotas uniformes mensuales vencidas de 5 380,54 um?

9. Valor futuro de un principal

49. Una empresa que tiene aprobada una línea de descuento de pagaré que devenga una TEM de 0,02, necesita un importe de 4 000 um. Si el plazo de vencimiento del financiamiento es de 45 días, ¿cuánto es el valor nominal del pagaré?

50. ¿Por qué valor nominal debe girarse una letra de cambio con vencimiento a 90 días para obtener un valor presente de 2 000 um después de descontarla? La operación de descuento devenga una TNA de 0,12 con capitalización diaria.

10. Valor presente de un valor futuro

51. Dentro de 70 días se recibirá 2 000 um. ¿Cuánto es su valor actual con una TNA de 0,18 capitalizable mensualmente?

52. Si hoy se descontó una letra de cambio con valor nominal de 100 000 um, que vencerá dentro de 42 días, ¿cuánto es el importe neto que abonará el banco en la cuenta corriente del descontante? El financiamiento devenga una TET de 0,04.

53. ¿Cuánto fue el capital que al cabo de 6 meses se convirtió en 20 000 um; esta inversión devengó una TEA de 0,2?

11. Misceláneos

54. Una casa comercial vende un órgano electrónico y ofrece las siguientes alternativas:

    a. Al contado en 4 300 um.
    b. Cuota inicial de 2 000 um y una letra a 15 días por 2 350 um.
    c. Cuota inicial de 2 000 um y una letra a 30 días por 2 390 um.
    d. Cuota inicial de 2 000 um y una letra a 45 días por 2 450 um.

    ¿Cuál es la mejor oferta para un cliente cuyo costo de oportunidad es una TEM de 0,05 y le es indiferente disponer del bien ahora o dentro de 45 días?

55. Una empresa solicita a un banco un préstamo de 10 000 um que devenga una TNA de 0,24 capitalizable mensualmente, para rembolsarlo en el plazo de 4 años con cuotas uniformes cada fin de trimestre. Inmediatamente después de haber pagado la décima cuota decide cancelar el resto de la deuda. ¿Qué importe tendrá que cancelar al banco?

56. Una maestría en Administración de Negocios tiene un costo de 190 um por cada crédito de estudios. El plan curricular contempla 60 créditos que pueden aprobarse satisfactoriamente en el plazo de 2 años. Roberto Rojo, estudiante de contabilidad a quien a la fecha le faltan 3 años para concluir su bachillerato, decidió seguir la maestría al término de sus estudios superiores. Para estos efectos, a fin de cada mes durante los 3 años siguientes, ahorrará un determinado importe uniforme que le permita sufragar el costo de su maestría.

    Si se supone que:

    - la maestría se inicia inmediatamente al término de los estudios superiores,
    - dura exactamente 2 años,
    - el costo total se distribuye en cuotas uniformes que deben pagarse cada fin de mes, y
    - que Roberto puede percibir una TEM de 0,005 por sus ahorros.

    ¿Cuánto es el importe uniforme que debe ahorrar Roberto cada mes durante 3 años consecutivos para cubrirlos costos de estudios?

Resumen del capítulo

Un conjunto de rentas uniformes que constituyen una anualidad simple vencida pueden llevarse:

- hacia el final del horizonte temporal de la anualidad y formar su respectivo *monto final* o *valor futuro*; en este caso se utiliza el factor de capitalización de la serie uniforme FCS.

- hacia el inicio del horizonte temporal de la anualidad (momento 0), y constituir su respectivo *valor presente*; en este caso se utiliza el factor de actualización de la serie uniforme FAS.

Las rentas equivalentes de una anualidad simple vencida se calculan a partir de un valor futuro o de un valor presente.

Un valor futuro se convierte en *rentas uniformes equivalentes* con el factor de depósito al fondo de amortización FDFA. Un valor presente se convierte en *rentas uniformes equivalentes* con el factor de recuperación del capital FRC.

Si se conocen los elementos de una anualidad simple: P, R, S e i, puede calcularse n. Al multiplicar n por el tiempo de cada período de renta, se obtiene el horizonte temporal (días). El valor de n en una anualidad simple indica el número de períodos de tasa o el número de rentas; se calcula a partir de S, o a partir de P.

Si el valor de n es un número no entero, entonces tiene un sentido matemático, pero no económico. En este caso para la parte no entera hay que hallar su fecha de vencimiento (que es inferior al período de renta) y el importe de la renta en esa fecha; El valor de n también puede redondearse al entero inferior o al entero superior, en ambos casos hay que calcular el valor de la última renta por equivalencia financiera.

Si se conoce P, R, S y n puede calcularse la tasa implícita de la anualidad; en este caso el valor de i es la tasa interna de retorno TIR. El cálculo de i cuando existen más de dos rentas se efectúa por el método de prueba y error.

Los factores financieros son fórmulas matemáticas que utilizan el interés compuesto y el principio de equivalencia financiera que dice: dos unidades monetarias ubicadas en diferentes momentos del horizonte temporal no son comparables, dado que tienen diferentes poderes adquisitivos, debido a la tasa de costo de oportunidad del capital.

Los factores financieros se aplican para desarrollar un conjunto de productos financieros.

Los principales factores financieros son los siguientes:

- Factor simple de capitalización FSC y factor de capitalización de la serie FCS, cuyas funciones son llevar al futuro un stock de efectivo y un conjunto de flujos de efectivo, respectivamente.

- Factor simple de actualización FSA y factor de actualización de la serie FAS, cuyas funciones son traer al presente un stock futuro de efectivo y un conjunto de flujos de efectivo o rentas, respectivamente.

- Factor de recuperación del capital FRC y factor de depósito al fondo de amortización FDFA, cuyas funciones son convertir un stock presente o un stock futuro de efectivo en flujos de efectivo o rentas.

Entre los seis factores financieros se da un conjunto de relaciones que facilitan la solución de operaciones financieras.

Capítulo 3

ANUALIDADES ANTICIPADAS

El objetivo general de este capítulo es estudiar las anualidades simples anticipadas y los factores financieros anticipados que se generan cuando se convierte un stock de efectivo en flujos y viceversa.

Objetivos del capítulo

Al terminar de estudiar este capítulo, el lector estará capacitado para:

3.1 Definir una anualidad anticipada y convertir rentas anticipadas en rentas vencidas equivalentes.

3.2 Demostrar la fórmula del monto de una anualidad simple anticipada, y hallar su monto a partir de un conjunto de rentas uniformes anticipadas.

3.3 Demostrar la fórmula del valor presente de una anualidad simple anticipada y calcular su valor presente a partir de un conjunto de rentas uniformes anticipadas.

3.4 Calcular rentas uniformes anticipadas si se conoce un valor futuro o un valor presente.

3.5 Calcular rentas uniformes anticipadas equivalentes a partir de un stock de efectivo ubicado en el futuro.

3.6 Calcular rentas uniformes anticipadas equivalentes a partir de un stock de efectivo ubicado en el presente.

3.7 Calcular el número de rentas en una anualidad anticipada; a partir de un valor presente, y a partir de un valor futuro.

3.8 Calcular la tasa implícita de una anualidad anticipada, o tasa interna de retorno.

3.9 Elaborar modelos en Excel que resuelven problemas de anualidades anticipadas.

Simbología

Los nuevos símbolos que se utilizan en el presente capítulo son los siguientes:

R_a	Renta anticipada.
$(1+i).FCS_{i;n}$	Factor de capitalización de la serie uniforme anticipado.
$(1+i).FAS_{i;n}$	Factor de actualización de la serie uniforme anticipado.
$(1+i)^{-n}.FDFA_{i;n}$	Factor de depósito al fondo de amortización anticipado.
$(1+i)^{-1}.FRC_{i;n}$	Factor de recuperación del capital anticipado.

3.1 Anualidad anticipada

Una anualidad anticipada es una sucesión de rentas anticipadas o imposiciones R_a que empiezan en el momento 0, a inicios del período de renta, como sucede en:

- el pago de alquileres,
- las compras a plazos, cuando debe pagarse una cuota inicial que da inicio al período del crédito,
- el pago de las pólizas de seguros,
- el pago de las pensiones de enseñanza, etc.

La diferencia entre una anualidad simple vencida y una anualidad simple anticipada, dado un número igual de rentas, radica en que en la anualidad vencida la última renta coincide con el término del plazo de la anualidad, mientras que en la anualidad anticipada la última renta se produce un período antes del término de la anualidad. Esa diferencia se observa en las figuras 3.1 y 3.2.

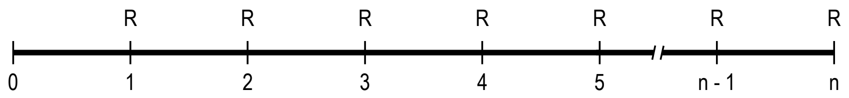


Figura 3.1 Anualidad simple vencida.

Figura 3.2 Anualidad simple anticipada.

Si se conoce una renta vencida R, la renta anticipada o imposición R_a se obtiene al descontar aquélla, un período de renta con la tasa efectiva de ese período.

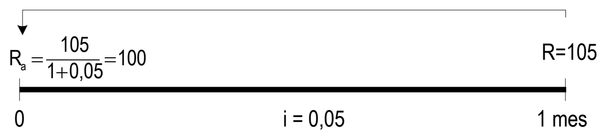


Figura 3.3 Renta vencida de 105 um convertida en renta anticipada de 100 um, al descontar un período de renta.

Por ejemplo, si hoy se decide cancelar anticipadamente la cuota de un préstamo que vence dentro de un mes y cuyo importe de 105 um incluye el interés generado por una TEM de 0,05, sólo tendrá que abonarse su respectivo valor presente equivalente a 100 um = $\frac{105}{1+0,05}$ (como se muestra en la figura 3.3); esto es posible si existe una cláusula de prepago de la deuda.

Equivalencia financiera entre R y Ra

Dado R, i y n=1 puede calcularse R_a a partir de R que se descuenta un período.

$$\boxed{R_a = \frac{R}{1+i}} \quad (3.1) \qquad \boxed{R = R_a(1+i)} \quad (3.2)$$

La fórmula (3.1) calcula una renta anticipada a partir de una renta vencida. Del mismo modo, si se tiene como dato una R_a, entonces puede multiplicarse por (1+i) para convertirla en R. La fórmula (3.2) calcula una renta vencida a partir de una renta anticipada.

Una anualidad anticipada se transforma en una anualidad vencida equivalente, al multiplicar cada una de sus R_a por (1+i). Convertida la anualidad anticipada en vencida, se le aplican los factores financieros de las anualidades vencidas, para resolver problemas de equivalencia financiera.

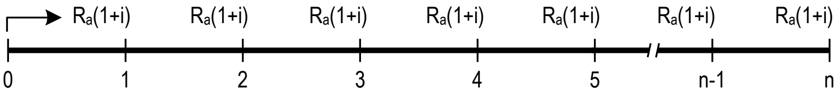


Figura 3.4 Rentas anticipadas convertidas en rentas vencidas.

Convertidas las anualidades anticipadas en anualidades vencidas, todas las fórmulas desarrolladas en el capítulo de anualidades vencidas son aplicables a las anualidades anticipadas, para lo cual debe utilizarse $R_a(1+i)$ en lugar de R.

Debe tenerse cuidado en diferenciar el número de períodos de renta n, del ordinal asignado a cada renta. En una anualidad anticipada, la primera R_a se produce en el momento cero $M=0$, la segunda R_a se produce cuando $M=1$, la tercera R_a se produce cuando $M=2$, y así sucesivamente.

Figura 3.5 Ubicación de las R_a en los momentos del horizonte temporal compuesto de n períodos de rentas.

3.2 Monto de una anualidad simple anticipada

Dado una tasa efectiva i, las rentas anticipadas R_a que constituyen una anualidad simple anticipada, pueden transformarse por equivalencia financiera en su respectivo valor futuro equivalente S.

Demostración de la fórmula del monto de una anualidad simple anticipada
Al tomar como fecha focal el final del horizonte temporal de la anualidad, puede deducirse la fórmula del valor futuro de una anualidad simple anticipada, del siguiente modo:

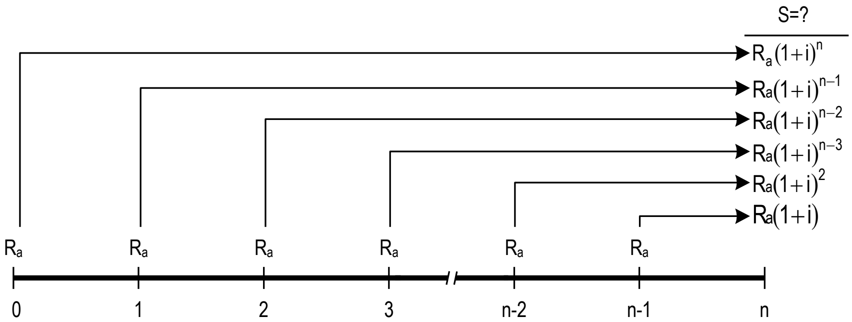


Figura 3.6 Rentas anticipadas uniformes capitalizadas hasta el momento n.

Cada flujo de caja R_a está sometido a interés compuesto por n números diferentes de períodos: el primero durante n períodos, el segundo durante n-1 períodos, el penúltimo durante dos períodos y el último durante un período (hasta el final del horizonte temporal). El valor futuro S de la anualidad, es igual a la suma de los montos parciales de cada R_a llevado al final del horizonte temporal:

$$S = R_a(1+i) + R_a(1+i)^2 + \cdots + R_a(1+i)^{n-1} + R_a(1+i)^n \qquad \text{(a)}$$

S es igual a la suma de una progresión geométrica creciente $S = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$, donde $a_1 = R_a(1+i)$, $r = (1+i)$ y cuya solución es:

$$S = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} = \frac{R_a(1+i)[(1+i)^n-1]}{1+i-1} \qquad \text{(b)}$$

Al reagrupar y eliminar términos en (b) se tiene:

$$\boxed{S = R_a\left[(1+i) \times \frac{(1+i)^n-1}{i}\right]} \qquad (3.3a)$$

La fórmula (3.3a) calcula el valor futuro de una anualidad simple anticipada en la cual R_a, i y n son del mismo período de tiempo.

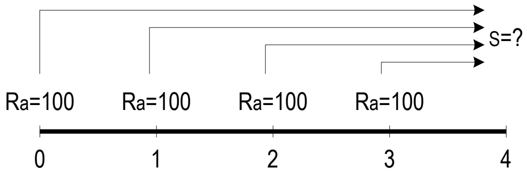
El factor de capitalización de la serie uniforme anticipado FCS
Puede apreciarse que (3.3a) es similar al monto de una anualidad simple vencida (2.1a), cuya R se cambió por su equivalente $R_a(1+i)$, por lo tanto (3.3a) puede representarse:

$$\boxed{S = R_a\left[(1+i).FCS_{i;n}\right]} \qquad (3.3b)$$

La fórmula (3.3b) se lee: "el FCS anticipado a una tasa i por período durante n períodos de renta, transforma una serie uniforme de rentas anticipadas R_a, en un valor futuro S". El $FCS = (1+i)\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$ es el monto de una anualidad cuyas rentas uniformes simples anticipadas son de 1 um.

Ejemplo 3.1
¿Qué monto se acumulará al término del cuarto mes, si hoy y durante 3 meses consecutivos se depositan 100 um en una cuenta de ahorros que devenga una TNA de 0,24 con capitalización mensual?
Solución

Con los datos R_a=100; TEM=0,02; n=4 y con la fórmula (3.3a) se calcula S.



$S = R_a[(1+i).FCS_{0,02;4}]$ $\qquad S = 100\left[1{,}02 \times \frac{1{,}02^4-1}{0{,}02}\right] = 100 \times 4{,}20404016 = 420{,}4$

Monto de una anualidad simple anticipada cuando el período de tasa es diferente del período de renta

Ejemplo 3.2
Calcule el monto que se acumulará en un período de 2 años; en este plazo se efectuarán depósitos uniformes anticipados de 2 000 um cada 45 días. Los depósitos devengan una TNA de 0,16 capitalizable trimestralmente.

Solución
Con los datos R_a=2 000; $TE_{45\ días}$=0,01980390272; n=16 y con la fórmula (3.3a), se tiene:

$TE_{45\ días} = (1+TET)^{45/90} - 1$ $\qquad TE_{45\ días} = 1{,}04^{45/90} - 1 = 0{,}01980390272$

$S = R_a[(1+i).FCS_{i;n}]$ $\qquad S = 2\ 000\left[1{,}01980390272 \times \frac{1{,}01980390272^{16}-1}{0{,}01980390272}\right]$

$$S = 2\ 000 \times 18{,}97949921 = 37\ 959$$

3.3 Valor presente de una anualidad simple anticipada

Dado una tasa efectiva i, las rentas R_a que constituyen una anualidad simple anticipada, pueden transformarse por equivalencia financiera en su respectivo valor presente P.

Demostración de la fórmula del valor presente de una anualidad simple anticipada
Al tomar como fecha focal el inicio del horizonte temporal de la anualidad, puede deducirse la fórmula del valor presente de una anualidad simple del modo siguiente:

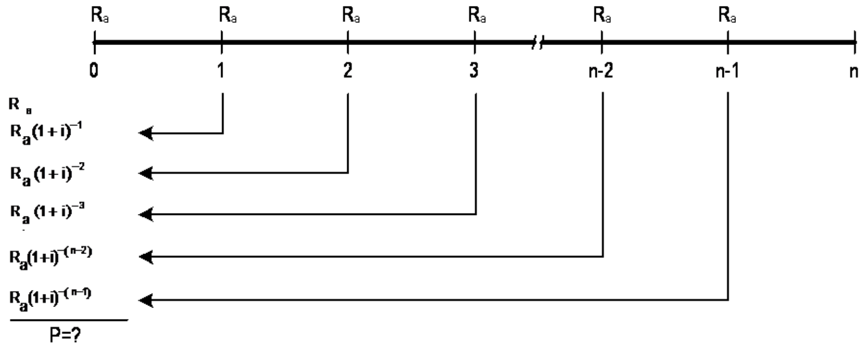


Figura 3.7 Rentas uniformes descontadas hacia el momento 0.

El primer flujo R_a no necesita descontarse al encontrarse ya en el presente o momento 0; el segundo se descuenta durante 1 período, el tercero durante 2 períodos, el penúltimo durante n-2 períodos y el último durante n-1 períodos. El valor presente de la anualidad es igual a la suma de los valores presentes de cada R_a descontados hacia el inicio del horizonte temporal:

$$P = R_a + R_a(1+i)^{-1} + R_a(1+i)^{-2} + \cdots + R_a(1+i)^{-(n-2)} + R_a(1+i)^{-(n-1)} \quad (1)$$

$$P = R_a\left[1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-2)} + (1+i)^{-(n-1)}\right] \quad (2)$$

La serie de términos que se encuentran dentro del corchete, en la ecuación (2) constituyen la suma de una progresión geométrica decreciente $\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$, donde $a_1 = 1$, $r = (1+i)^{-1}$, y cuya solución es:

$$\frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n} - \frac{1}{(1+i)^n}}{\frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i}} = \frac{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}}{\frac{i}{1+i}} = \frac{(1+i)(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Al reemplazar la suma de los términos de la progresión geométrica en (2) se tiene:

$$\boxed{P = R_a\left[(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]} \quad (3.4a)$$

La fórmula (3.4a) calcula el valor presente de una anualidad simple anticipada en la cual R_a, i y n son del mismo período de tiempo; también puede demostrarse del siguiente modo.

$$S = R_a(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \qquad \text{fórmula (3.3a)}$$

$$S = P(1+i)^n \qquad \text{fórmula (2.9a)}$$

$$P(1+i)^n = R_a(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \qquad \text{al reemplazar (2.9a) en (3.3a)}$$

$$P = R_a\left[(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \qquad \text{fórmula (3.4a)}$$

El factor de actualización de la serie uniforme anticipada FAS

En la fórmula (3.4a) el término entre corchetes, es el Factor de Actualización de la Serie uniforme anticipada (FAS), por lo tanto (3.4a) se representa:

$$\boxed{P = R_a\left[(1+i)FAS_{i;n}\right]} \quad (3.4b)$$

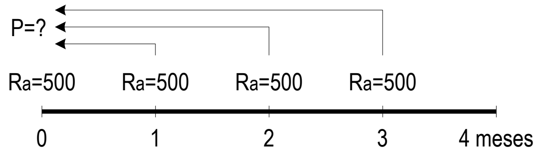
La fórmula (3.4b) se lee: "el FAS a una tasa i por período durante n períodos de renta, transforma una serie uniforme de rentas anticipadas R_a en un valor presente P". El $FAS = (1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ es el valor presente de una anualidad cuyas rentas uniformes simples anticipadas son de 1 um.

Ejemplo 3.3

Se alquila un local comercial por cuatro meses con pagos anticipados de 500 um cada uno. ¿Cuál es el valor actual del contrato de arriendo con una TEM de 0,03?

Solución

Con los datos R_a=500; TEM=0,03; n=4 y con la fórmula (3.4a) se calcula P.



$P = R_a\left[(1+i)FAS_{0,03;4}\right]$ $\quad$ $P = 500(1+0,03) \times \frac{(1+0,03)^4 - 1}{0,03(1+0,03)^4}$

$$P = 500 \times 3,828611355 = 1\,914,31$$

Valor presente de una anualidad simple anticipada cuando los períodos de tasa y de renta son diferentes

Ejemplo 3.4

Una empresa firma un contrato de alquiler de un local comercial por el período de 5 años. Si los pagos mensuales anticipados son 2 500 um; calcule el valor presente del alquiler del primer año del contrato, con una TNA de 0,12 capitalizable quincenalmente.

Solución

Con los datos R_a=2 500; TEM=0,010025; n=12 y con la fórmula (3.4a), se tiene:

$TEM = (1+TEQ)^{30/15} - 1$ $\quad$ $TEM = \left(1 + \frac{0,12}{360 \div 15}\right)^{30/15} - 1 = 0,010025$

$P = R_a\left[(1+i)FAS_{0,010025;12}\right]$ $\quad$ $P = 2\,500 \times 1,010025\left[\frac{(1+0,010025)^{12} - 1}{0,010025(1+0,010025)^{12}}\right]$

$$P = 2\,500 \times 11,36611419 = 28\,415,29$$

3.4 Rentas uniformes anticipadas

Si se conocen: la tasa de interés i, el número de rentas uniformes n, y además el importe de un stock de efectivo que puede ubicarse al inicio del horizonte temporal P, o al final de dicho horizonte S, de una anualidad simple anticipada; puede calcularse por equivalencia financiera, el importe de sus respectivas rentas anticipadas equivalentes.

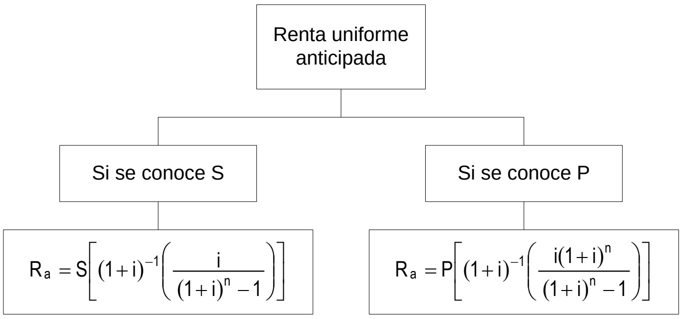


Figura 3.8 Rentas uniformes anticipadas equivalentes en una anualidad simple, cuando además de i y n, se conoce el valor futuro o el valor presente.

Las rentas uniformes anticipadas que se muestran en la figura 3.8 se obtienen al despejarlas de las fórmulas (3.3a) y (3.4a).

En el cálculo de los importes de las rentas uniformes anticipadas, el período de la tasa de interés debe subordinarse al período de renta; si no fuese así, debe convertirse el período de la tasa proporcionada como dato, al período de renta. Para estos efectos se proporcionaliza la tasa nominal o se halla la tasa equivalente en el caso que la tasa sea efectiva; en ambos casos la tasa de interés proporcionada como dato se convierte al período de renta.

3.5 Renta uniforme anticipada a partir de S

La renta uniforme anticipada o imposición R_a, puede obtenerse al despejarla de la fórmula (3.3a).

$$S = R_a\left[(1+i)\times\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \quad (3.3a)$$

$$R_a(1+i) = S\left[\frac{1}{\frac{(1+i)^n-1}{i}}\right]$$

Al reagrupar términos, se tiene:

$$\boxed{R_a = S\left[(1+i)^{-1}\times\frac{i}{(1+i)^n-1}\right]} \quad (3.5a)$$

La fórmula (3.5a) calcula la renta uniforme anticipada a partir de un valor futuro en la cual i y n son del mismo plazo de R_a.

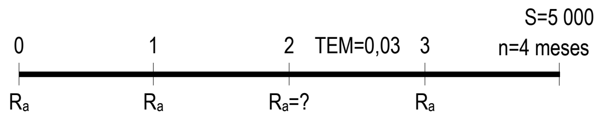
El factor de depósito al fondo de amortización FDFA de una anualidad anticipada
En la fórmula (3.5a) el término entre corchetes, es el Factor de Depósito al Fondo de Amortización anticipado (FDFA), por lo tanto la fórmula (3.5a) se representa:

$$\boxed{R_a = S[(1+i)^{-1}]FDFA_{i;n}} \quad (3.5b)$$

La fórmula (3.5b) se lee: "el FDFA anticipado a una tasa i por período durante n períodos de renta, transforma un valor futuro en una renta uniforme anticipada R_a". El $FDFA = (1+i)^{-1}\left[\frac{i}{(1+i)^n-1}\right]$ es la renta uniforme anticipada que colocada durante cada período de renta en el horizonte temporal, permite acumular una um al final de dicho horizonte.

Ejemplo 3.5
Calcule el importe de la imposición mensual que al cabo de 4 meses permitirá acumular 5 000 con una TEM de 0,03.

Solución
Con los datos S=5 000; TEM=0,03; n=4 y con la fórmula del FDFA, se calcula R_a.



$R_a = S[(1+i)^{-1}]FDFA_{i;n}$ $\qquad R_a = 5\,000\left[1{,}03^{-1}\times\frac{0{,}03}{0{,}03\times1{,}03^4}\right]$

$$R_a = 5\,000\times0{,}232065092 = 1\,160{,}33$$

Ejemplo 3.6
Calcule el importe del depósito uniforme anticipado anual necesario para acumular un valor futuro de 6 000 um al final del plazo de 5 años. Estos depósitos que se efectuarán en un banco percibirán una TEA de 0,1.

Solución
Con los datos S=6 000; TEA=0,1; n=5 y con la fórmula del FDFA, se calcula R_a.

$R_a = S[(1+i)^{-1}]FDFA_{i;n}$ $\qquad R_a = 6\,000\left[1{,}1^{-1}\times\frac{0{,}1}{0{,}1\times1{,}1^5}\right]$

$$R_a = 6\,000\times0{,}1489068 = 893{,}44$$

Ejemplo 3.7
Una empresa decidió adquirir dentro de 4 meses un grupo electrógeno cuyo precio se estima en esa fecha en 5 000 um. ¿Qué importe uniforme de inicio de mes, debe ahorrar en ese período de tiempo, en un banco que paga una TNA de 0,24 con capitalización mensual, a fin de disponer ese monto al vencimiento de dicho plazo?

Solución
Con los datos S=5 000; TEM=0,02; n=4 y con la fórmula del FDFA, se calcula R_a.

$R_a = S[(1+i)^{-1}]FDFA_{i;n}$ $\qquad$ $R_a = 5\ 000\left[1{,}02^{-1} \times \frac{0{,}02}{0{,}02 \times 1{,}02^4}\right]$

$R_a = 5\ 000 \times 0{,}237866424 = 1\ 189{,}33$

Renta uniforme anticipada a partir de S cuando el período de tasa es diferente del período de renta

Ejemplo 3.8
Para formar un fondo de 50 000 um al final de un plazo de 360 días se efectúan depósitos anticipados cada 20 días. Calcule el importe de la renta uniforme anticipada, si el fondo devenga una TEA de 0,15.

Solución
Con los datos S=50 000; $TE_{20\ días}$=0,007794775; n=18 y con la fórmula del FDFA, se calcula R_a.

$TE_{20\ días} = (1+TEA)^{20/360} - 1$ $\qquad$ $TE_{20\ días} = 1{,}15^{20/360} - 1 = 0{,}007794775$

$R_a = S[(1+i)^{-1}]FDFA_{i;n}$

$R_a = 5\ 000\left[1{,}007794775^{-1} \times \frac{0{,}007794775}{0{,}007794775 \times 1{,}007794775^{18}}\right]$

$R_a = 50\ 000 \times 0{,}05156324 = 2\ 578{,}16$

3.6 Renta uniforme anticipada a partir de P

La renta anticipada uniforme R_a, puede obtenerse al despejarla de la fórmula (3.4a).

$$P{=}R_a\left[(1+i)\times\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] \qquad (3.4a)$$

$$R_a(1+i){=}P\left[\frac{1}{\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}}\right]$$

Al reagrupar términos, se tiene:

$$\boxed{R_a=P\left[(1+i)^{-1}\times\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]} \qquad (3.6a)$$

La fórmula (3.6a) calcula la renta uniforme anticipada a partir de un valor presente en el cual i y n son del mismo plazo de R_a.

El factor de recuperación del capital anticipado FRC

En la fórmula (3.6a) el término entre corchetes, es el Factor de Recuperación del Capital anticipado (FRC), por lo tanto la fórmula (3.6a) se representa:

$$\boxed{R_a=P\left[(1+i)^{-1}.FRC_{i;n}\right]} \qquad (3.6b)$$

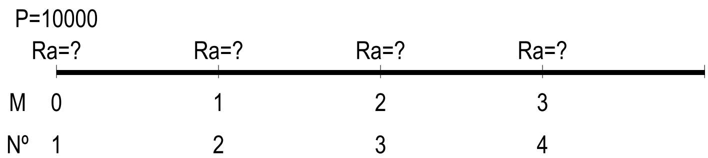
La fórmula (3.6b) se lee: "el FRC anticipado una tasa i por período durante n períodos de renta, transforma un valor presente en una renta uniforme anticipada R_a". El $FRC=(1+i)^{-1}\times\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$ es la renta uniforme anticipada que amortiza un préstamo de 1 um durante un determinado horizonte temporal.

Ejemplo 3.9

¿Cuál es la imposición mensual uniforme por pagar por un préstamo bancario a corto plazo de 10 000 um, rembolsable con 4 cuotas anticipadas, este préstamo devenga una TEM de 0,03? Calcule además el préstamo neto.

Solución

Con los datos P=10 000; TEM=0,03; n=4 y con la fórmula (3.6a) se calcula R_a.



$R_a=P\left[(1+i)^{-1}.FRC_{i;n}\right]$ $\qquad R_a=10\,000\left[1{,}03^{-1}\times\frac{0{,}03(1+0{,}03)^4}{(1+0{,}03)^4-1}\right]$

$$R_a=10\,000\times 0{,}261191306=2\,611{,}91$$

Ejemplo 3.10

¿Cuál es el importe de la cuota uniforme por pagar por un préstamo bancario de 8 000 um, que debe amortizarse durante un año con pagos mensuales anticipadas? El préstamo genera una TNA de 0,18 capitalizable mensualmente.

Solución

Con los datos P=8 000; TEM=0,015; n=12 y con la fórmula (3.6a) se calcula R_a.

$R_a=P\left[(1+i)^{-1}.FRC_{i;n}\right]$ $\qquad R_a=8\,000\left[1{,}015^{-1}\times\frac{0{,}015(1+0{,}015)^{12}}{(1+0{,}015)^{12}-1}\right]$

$$R_a=8\,000\times 0{,}090325116=722{,}60$$

3.7 Cálculo de n en una anualidad anticipada

El número de cuotas uniformes anticipadas puede calcularse a partir de un valor presente P o de un valor futuro S.

Cálculo de n a partir de P

Dado que las fórmulas (3.4a) o (3.6a) incluyen a la variable P, puede despejarse n en ambas fórmulas con el mismo resultado.

$$P= R_a\left[(1+i)\times\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] \qquad (3.4a)$$

$$R_a= P\left[(1+i)^{-1}\times\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right] \qquad (3.6a)$$

Al despejar n de la fórmula (3.6a), se tiene:

$$R_a= P\left[(1+i)^{-1}\times\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] \qquad (1)$$

$$R_a(1+i)[1-(1+i)^{-n}]= Pi \qquad (2)$$

$$-(1+i)^{-n}= \frac{Pi}{R_a(1+i)}-1 \qquad (3)$$

$$(1+i)^{-n}= 1-\frac{Pi}{R_a(1+i)} \qquad (4)$$

$$-nLog(1+i)= Log\left[1-\frac{Pi}{R_a(1+i)}\right] \qquad (5)$$

Al tomar el logaritmo en ambos miembros de la expresión (5), se tiene:

$$\boxed{n=-\frac{Log\left[1-\frac{Pi}{R_a(1+i)}\right]}{Log(1+i)}} \qquad (3.7)$$

La fórmula (3.7) calcula el número de períodos de renta en una anualidad simple anticipada, cuando se conoce un valor presente P y donde R_a e i, son del mismo período, por lo tanto el período de n o período de renta es el mismo de i.

Ejemplo 3.11

Una deuda de 20 000 um devenga una TEM de 0,01 y se amortiza con cuotas uniformes mensuales anticipadas de 2 111,64 um. ¿Con cuántas cuotas se cancela dicha deuda?

Solución

Con los datos P=20 000; TEM = 0,01; R_a=2 090,73 y con la fórmula (3.7) se tiene:

$$n=-\frac{Log\left[1-\frac{Pi}{R_a(1+i)}\right]}{Log(1+i)} \qquad n=-\frac{Log\left[1-\frac{20\,000\times0{,}01}{2\,090{,}73\times1{,}01}\right]}{Log(1+0{,}01)}=\frac{Log\ 0{,}905286764}{Log\ 1{,}01}=10$$

Cálculo de n a partir de S

Dado que las fórmulas (3.3a) o (3.5a) incluyen a la variable S, puede despejarse n de ambas fórmulas con el mismo resultado.

$$S= R_a\left[(1+i)\times\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \qquad (3.3a)$$

$$R_a= S\left[(1+i)^{-1}\times\frac{i}{(1+i)^n-1}\right] \qquad (3.5a)$$

Al despejar n de la fórmula (3.3a), se tiene:

$$S = R_a(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\frac{Si}{R_a(1+i)} + 1 = (1+i)^n$$

$$n\, Log(1+i) = Log\left[\frac{Si}{R_a(1+i)} + 1\right]$$

$$\boxed{n = \frac{Log\left[\frac{Si}{R_a(1+i)} + 1\right]}{Log(1+i)}} \quad (3.8)$$

La fórmula (3.8) calcula el número de períodos de renta o números de renta en una anualidad simple anticipada cuando se conoce el valor futuro S y donde R_a e i, son del mismo período, por lo tanto el período de n es el mismo de i.

Ejemplo 3.12
Se desea acumular un fondo de 30 000 um con cuotas uniformes trimestrales anticipadas de 2 192,93 um. Si el fondo devenga una TET de 0,02 ¿en cuántos trimestres se acumulará dicho fondo?

Solución
Con los datos R_a=2 192,93; TET=0,02; S=30 000 y con la fórmula (3.8) se calcula n.

$$n = \frac{Log\left[\frac{Si}{R_a(1+i)}+1\right]}{Log(1+i)} \qquad n = \frac{Log\left[\frac{30\,000 \times 0{,}02}{2\,192{,}93 \times 1{,}02}+1\right]}{Log\ 1{,}02} \qquad n = \frac{Log\ 1{,}26824171}{Log\ 1{,}02} = 12$$

Cálculo de n cuando tiene un valor no entero

Ejemplo 3.13
¿Con cuántas cuotas uniformes trimestrales anticipadas de 1 500 um se podrá amortizar un préstamo de 10 000 um el cual devenga una TET de 0,025? Si el valor de n fuese no entero:

a. Calcule el importe de la última cuota anticipada cuyo valor es no entero y su respectiva fecha de pago.
b. Calcule el importe de la última cuota anticipada no uniforme para cancelar el préstamo, cuando esta se redondea al entero inmediato anterior.
c. Calcule el importe de la última cuota anticipada no uniforme para cancelar el préstamo, cuando esta se redondea al entero inmediato superior.

Solución
Con los datos R_a=1 500; TET=0,025; P=10 000 y con la fórmula (3.7) se calcula n.

$$n = -\frac{Log\left[1-\frac{Pi}{R_a(1+i)}\right]}{Log(1+i)} \qquad n = -\frac{Log\left[1-\frac{10\,000 \times 0{,}025}{1\,500 \times 1{,}025}\right]}{Log\ 1{,}025} = -\frac{Log\ 0{,}837398374}{Log\ 1{,}025} = 7{,}1865772199$$

El préstamo se amortiza con 7,1865772199 cuotas trimestrales anticipadas de 1 500 um; esto significa 8 cuotas anticipadas, 7 cuotas de 1 500 um y la octava cuota R_{a8} que es la incógnita y se ubica en el momento 6,1865772199.

Ra_1	Ra_2	Ra_3	Ra_4	Ra_5	Ra_6	Ra_7	Ra_8
1500	1500	1500	1500	1500	1500	1500	?
0	1	2	3	4	5	6	6,18

a. Importe de la última cuota anticipada cuyo valor es no entero y su respectiva fecha de pago.

$$10\,000 = \frac{1\,500}{1{,}025^0} + \frac{1\,500}{1{,}025^1} + \frac{1\,500}{1{,}025^2} + \frac{1\,500}{1{,}025^3} + \frac{1\,500}{1{,}025^4} + \frac{1\,500}{1{,}025^5} + \frac{1\,500}{1{,}025^6} + \frac{R_{a8}}{1{,}025^{6{,}1865772199}}$$

$10\ 000 = 9\ 762{,}188042 + 0{,}8583333333Ra_8$

$Ra_8 = 277{,}06$

La fecha de pago de la última cuota, es decir la octava cuota anticipada, es el día 557 (6,1865772199×90=556,7919), fecha en la que debe pagarse 277,06 um para cancelar el préstamo de 10 000 um. Esta respuesta se comprueba con la siguiente ecuación de equivalencia que utiliza la fórmula del valor presente con cuotas anticipadas.

$$P = R_a\left[(1+i)\times\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]+\frac{S}{(1+i)^n}$$

$$P = 1\ 500\left[1{,}025\times\frac{1{,}025^7-1}{0{,}025\times1{,}025^7}\right]+\frac{277{,}06}{1{,}025^{557/90}} = 9\ 762{,}19 + 237{,}8 = 10\ 000$$

b. Importe de la última cuota anticipada no uniforme para cancelar el préstamo, cuando esta se redondea al entero inmediato anterior, es decir 7 cuotas anticipadas.

$$10\ 000 = \frac{1\ 500}{1{,}025^0}+\frac{1\ 500}{1{,}025^1}+\frac{1\ 500}{1{,}025^2}+\frac{1\ 500}{1{,}025^3}+\frac{1\ 500}{1{,}025^4}+\frac{1\ 500}{1{,}025^5}+\frac{R_{a7}}{1{,}025^6}$$

$10\ 000 = 8\ 468{,}742743 + 0{,}86229686\ R_{a7}$

$R_{a7} = 1\ 775{,}79$

La fecha de pago de la última cuota anticipada (sétima) es el día 540 y su importe es 1 775,79 um; en este caso se pagan 6 cuotas anticipadas de 1 500 um y la sétima cuota de 1 775,79 um en el día 540.

$$P = R_a\left[(1+i)\times\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]+\frac{S}{(1+i)^n}$$

$$P = 1\ 500\left[1{,}025\times\frac{1{,}025^6-1}{0{,}025\times1{,}025^6}\right]+\frac{1\ 775{,}79}{1{,}025^6} = 8\ 468{,}74 + 1\ 531{,}26 = 10\ 000$$

c. Importe de la última cuota anticipada no uniforme para cancelar el préstamo, cuando esta se redondea al entero inmediato superior, es decir 8 cuotas anticipadas.

$$10\ 000 = \frac{1\ 500}{1{,}025^0}+\frac{1\ 500}{1{,}025^1}+\frac{1\ 500}{1{,}025^2}+\frac{1\ 500}{1{,}025^3}+\frac{1\ 500}{1{,}025^4}+\frac{1\ 500}{1{,}025^5}+\frac{1\ 500}{1{,}025^6}+\frac{R_{a8}}{1{,}025^7}$$

$10\ 000 = 9\ 762{,}188042 + 0{,}841265235 + R_{a8}$
$R_{a8} = 282{,}6836$

La fecha de pago de la última cuota anticipada (octava) es el día 630, y su importe es 282,68 um; en este caso se pagan 7 cuotas anticipadas de 1 500 um y la octava cuota de 282,68 um en el día 630.

$$P = R_a\left[(1+i)\times\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]+\frac{S}{(1+i)^n}$$

$$P = 1\ 500\left[1{,}025\times\frac{1{,}025^7-1}{0{,}025\times1{,}025^7}\right]+\frac{282{,}68}{1{,}025^7} = 9\ 762{,}19 + 237{,}81 = 10\ 000$$

Ejemplo 3.14
¿Cuántos depósitos de inicios de mes de 1 600 um serán necesarios ahorrar, para acumular un monto de 8 000 um en un banco que paga una TNA de 0,24 con capitalización mensual? Si el valor de n fuese no entero:

a. Calcule el importe de la última cuota anticipada cuyo valor es no entero y su respectiva fecha de pago.
b. Calcule el importe de la última cuota anticipada no uniforme para cancelar el préstamo, cuando esta se redondea al entero inmediato anterior.
c. Calcule el importe de la última cuota anticipada no uniforme para cancelar el préstamo, cuando esta se redondea al entero inmediato superior.

Solución
Con los datos R_a=1 600; TEM=0,02; S=8 000 y con la fórmula (3.8) se calcula n.

$$n=\frac{Log\left[\frac{Si}{R_a(1+i)}+1\right]}{Log(1+i)} \qquad n=\frac{Log\left[\frac{8\,000\times 0{,}02}{1\,600\times 1{,}02}+1\right]}{Log(1+0{,}02)}=\frac{Log\ 1{,}098039215}{Log\ 1{,}02}=4{,}722911592$$

El monto se acumula con 4,722911592 cuotas mensuales anticipadas de 1 600 um.

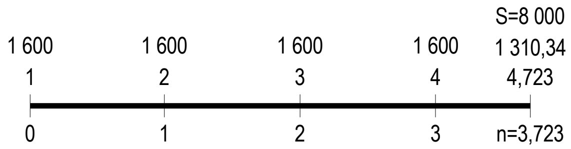
a. Importe de la última cuota anticipada cuyo valor es no entero y de su respectiva fecha de pago.

$$8\,000=1\,600(1{,}02^{3{,}722911592})+1\,600(1{,}02^{2{,}722911592})+1\,600(1{,}02^{1{,}722911592})+1\,600(1{,}02^{0{,}722911592})+Ra_5$$

$$8\,000=6\,689{,}66+Ra_5$$

$$Ra_5=1\,310{,}34$$

La fecha de depósito de la última cuota, es decir la quinta cuota anticipada, es el día 142 (4,722911592×30=141,6873478), fecha en la que debe depositarse 1 310,34 um para acumular el fondo de 8 000 um. Esta respuesta se comprueba con la siguiente ecuación de equivalencia que utiliza la fórmula del valor futuro con cuotas anticipadas.



$$S=\left[1\,600\times 1{,}02\times\frac{1{,}02^3-1}{0{,}02}+1\,600\right]\times 1{,}02^{0{,}722911592}+1\,310{,}34$$

$$S=6\,594{,}5728\times 1{,}02^{0{,}722911592}+1\,310{,}34=6\,689{,}66+1\,310{,}34=8\,000$$

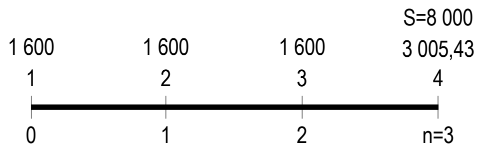
b. Importe de la última cuota anticipada no uniforme para acumular el fondo, cuando esta se redondea al entero inmediato anterior, es decir 4 cuotas anticipadas.

$$8\,000=1\,600\times 1{,}02^3+1\,600\times 1{,}02^2+1\,600\times 1{,}02^1+R_{a4}$$

$$8\,000=4\,994{,}57+R_{a4}$$

$$R_{a4}=3\,005{,}43$$

El último depósito es 3 005,43 um y se realiza al final del tercer mes, fecha en la que se acumula el fondo de 8 000 um, como se demuestra a continuación.



$$S=R_a\left[(1+i)\times\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]+3\,005{,}43$$

$$S=1\,600\left[1{,}02\times\frac{1{,}02^3-1}{0{,}02}\right]+3\,005{,}43=4\,994{,}57+3\,005{,}43=8\,000$$

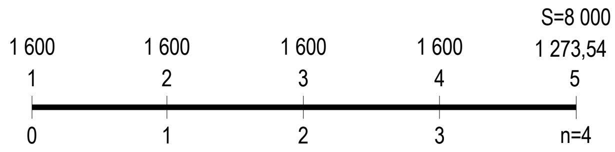
c. Importe de la última cuota anticipada no uniforme para acumular el fondo, cuando n se redondea al entero inmediato superior, es decir 5 cuotas anticipadas.

$$8\,000=1\,600\times 1{,}02^4+1\,600\times 1{,}02^3+1\,600\times 1{,}02^2+1\,600\times 1{,}02^1+R_{a5}$$

$$8\,000=6\,726{,}46+R_{a5}$$

$$R_{a5}=1\,273{,}54$$

El último depósito es 1 273,54 um y se realiza al final del cuarto mes, fecha en la que se acumula el fondo de 8 000 um, como se muestra a continuación.



$$S = R_a\left[(1+i)\times\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] + 1\ 273{,}54$$

$$S = 1\ 600\left[1{,}02\times\tfrac{1{,}02^4-1}{0{,}02}\right] + 1\ 273{,}54 = 6\ 726{,}46 + 1\ 273{,}54 = 8\ 000$$

3.8 Cálculo de i (TIR) en una anualidad anticipada

De modo similar a lo trabajado en el capítulo de anualidades vencidas, cuando se conocen P, R_a, S y n, pero no la tasa efectiva periódica, es posible hallarla si se plantea su respectiva ecuación de equivalencia. Se obtiene de diversos modos; por ejemplo:

- Por el "método de tanteo".
- Por prueba y error.
- Por aproximaciones sucesivas de un par de valores que se hallen uno por encima y otro debajo del valor buscado y con estos datos (polos) acercarse a su verdadero valor por interpolación lineal.

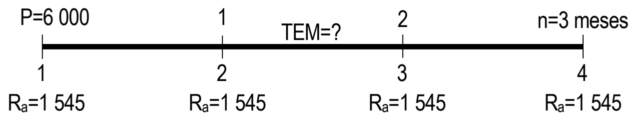
Esta tasa implícita de la anualidad se conoce como la TIR o tasa interna de retorno, que se calcula directamente con una calculadora financiera o con las funciones financieras de Excel: TASA, TIR, TIR.NO.PER o TIRM, según las características propias de la anualidad.

Ejemplo 3.15

Un electrodoméstico tiene un precio de 6 000,60 um al contado. A crédito se ofrece con cuatro cuotas mensuales anticipadas de 1 545 um cada una. ¿Cuál es la TEA cargada en el financiamiento?

Solución

Con los datos R_a=1 545; P=6 000,60; n=4; puede solucionarse el problema del siguiente modo.



$$6\,000=\frac{1\,545}{(1+i)^0}+\frac{1\,545}{(1+i)^1}+\frac{1\,545}{(1+i)^2}+\frac{1\,545}{(1+i)^3} \qquad (1)$$

$$6\,000=1\,545\left[(1+i)\times\frac{(1+i)^4-1}{i(1+i)^4}\right] \qquad (2)$$

La ecuación (1) es de grado 3 que no tiene solución algebraica, por lo tanto se asignarán valores a i de modo tal que el segundo miembro sea 6 000,60; para este proceso se utilizará la fórmula del FAS anticipado y la fórmula de la interpolación lineal.

i	FAS	Valor presente
0,019	3,88950978	6 009,29
0,021	3,87827506	5 991,94

En el cuadro anterior se observa que la tasa i es mayor que 0,019 pero menor que 0,021; por lo tanto se interpolará entre estos dos valores para hallar su valor aproximado.

Al hacer:

x_1= 0,019 y_1= 6 009,29

x = ? y= 6 000,60

x_2= 0,021 y_2= 5 991,94

Y al aplicar la fórmula (2.8) se tiene:

$$x= x_1+\frac{y-y_1}{y_2-y_1}(x_2-x_1)$$

$$x= 0{,}019+\frac{6\,000{,}6-6\,009{,}29}{5\,991{,}94-6\,009{,}29}(0{,}021-0{,}019)$$

$$x= 0{,}02$$

La tasa aproximada linealmente al verdadero valor de i es 0,02; para obtener la respuesta al problema planteado, debe hallarse la TEA a partir de la TEM calculada.

$TEA = (1 + TEM)^{360/30} - 1 \qquad TEA = (1 + 0{,}02)^{360/30} - 1 = 0{,}26824$

3.9 Modelos de anualidades anticipadas con Excel

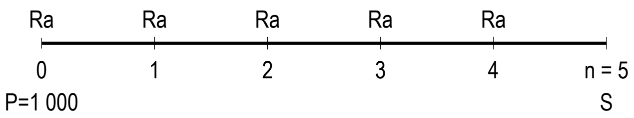
A continuación se presentan problemas de anualidades anticipadas resueltos en forma tradicional y con modelos implementados en una hoja de Excel, en los cuales se utilizan las Funciones Financieras Personalizadas (FFP).

Transformaciones financieras

1. Efectúe las seis transformaciones financieras equivalentes entre stocks y flujos de efectivo, considere un capital inicial de 1 000 um, una TEM de 0,03, un horizonte temporal de 5 meses y rentas mensuales uniformes anticipadas.

Solución

Con los datos P=1 000; TEM=0,03 y n=5; se calculan los factores financieros.



a. $S = P.FCS_{0,03;5}$ $\quad = 1\,000 \times 1{,}03^{5}$ $\quad = 1\,000{,}00 \times 1{,}159274074$ $\quad = 1\,159{,}27$

b. $R_a = S[(1+i)^{-1}]FDFA_{0,03;5}$ $\quad = 1\,159{,}27\left[1{,}03^{-1} \times \frac{0{,}03}{1{,}03^{5}-1}\right]$ $\quad = 1\,159{,}27 \times 0{,}182868515$ $\quad = 211{,}99$

c. $R_a = P\left[(1+i)^{-1}.FRC_{0,03;5}\right]$ $\quad = 1\,000\left[1{,}03^{-1} \times \frac{0{,}03 \times 1{,}03^{5}}{1{,}03^{5}-1}\right]$ $\quad = 1\,000{,}00 \times 0{,}211994729$ $\quad = 211{,}99$

d. $P = S.FSA_{0,03;5}$ $\quad = 1\,159{,}27 \times 1{,}03^{-5}$ $\quad = 1\,159{,}27 \times 0{,}862608784$ $\quad = 1\,000{,}00$

e. $P = R_a\left[(1+i)FAS_{0,03;5}\right]$ $\quad = 211{,}99\left[1{,}03 \times \frac{1{,}03^{5}-1}{0{,}03 \times 1{,}03^{5}}\right]$ $\quad = 211{,}99 \times 4{,}717098403$ $\quad = 1\,000{,}00$

f. $S = R_a\left[(1+i).FCS_{0,03;5}\right]$ $\quad = 211{,}99\left[1{,}03 \times \frac{1{,}03^{5}-1}{0{,}03}\right]$ $\quad = 211{,}99 \times 5{,}468409884$ $\quad = 1\,159{,}27$

En el modelo 3.1 se han estructurado 6 modelos que se muestran en las figuras 3.9 hasta 3.14 que obtienen los factores financieros y los montos, rentas anticipadas y valores presentes.

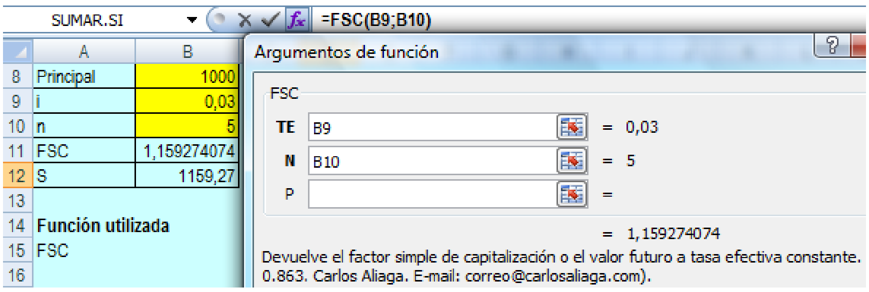


Figura 3.8 Modelo 3.1a que obtiene el FSC y el monto de un principal.

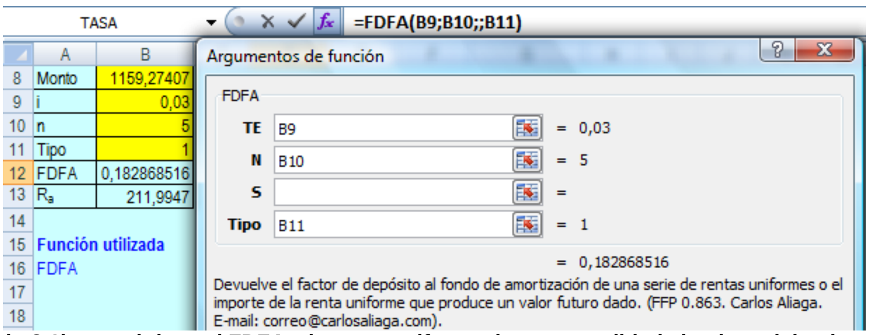


Figura 3.9 Modelo 3.1b que obtiene el FDFA y la renta uniforme de una anualidad simple anticipada partir de un valor futuro.

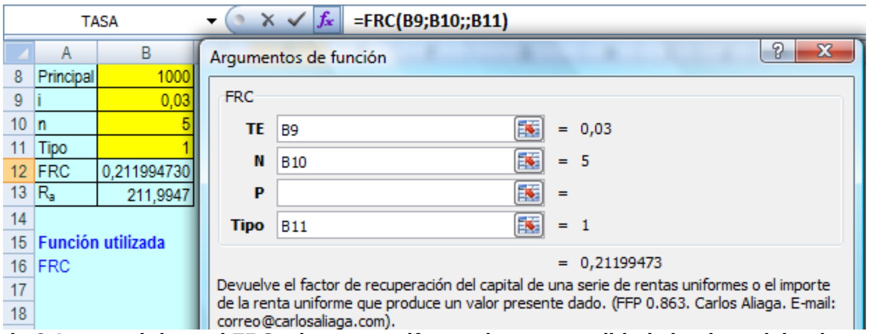


Figura 3.10 Modelo 3.1c que obtiene el FRC y la renta uniforme de una anualidad simple anticipada a partir de un valor presente.

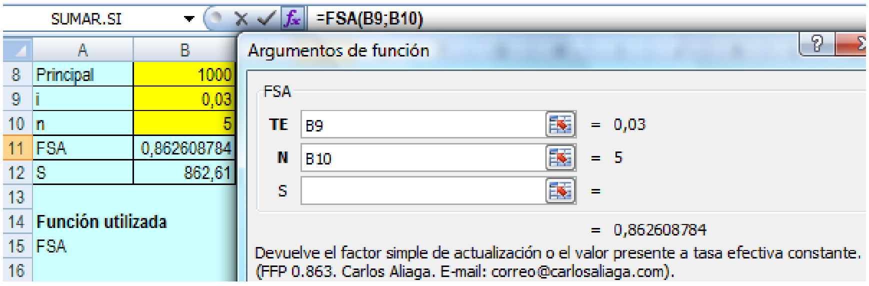


Figura 3.11 Modelo 3.1d que obtiene el FSA y el valor presente de un valor futuro.

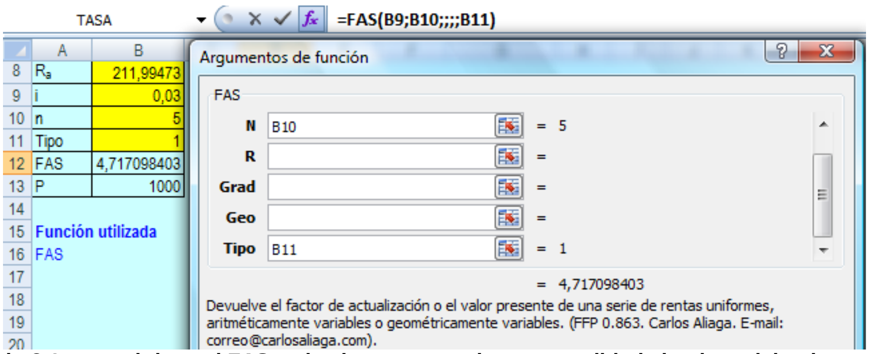


Figura 3.12 Modelo 3.1e que obtiene el FAS y el valor presente de una anualidad simple anticipada a partir de una renta uniforme anticipada.

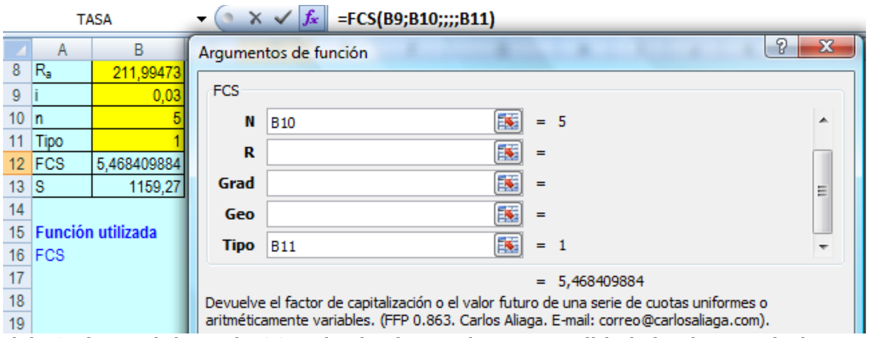


Figura 3.13 Modelo 3.1f que obtiene el FCS y el valor futuro de una anualidad simple a partir de una renta uniforme anticipada.

Monto de una anualidad simple anticipada

2. Calcule el monto que se acumulará en el plazo de un año, si en este período se efectúan depósitos mensuales anticipados de 2 000 um. Los depósitos devengan una TEM de 0,006.

Solución

Con los datos R_a=2 000; TEM=0,006 y n=12; se calcula S con la fórmula (3.3).

$S = R_a[(1+i).FCS_{0,006;12}]$ $\quad$ $S = 2\,000\left[1{,}006 \times \frac{1{,}006^{12}-1}{0{,}006}\right]$

$$S = 2\,000 \times 12{,}47845212 = 24\,956{,}90$$

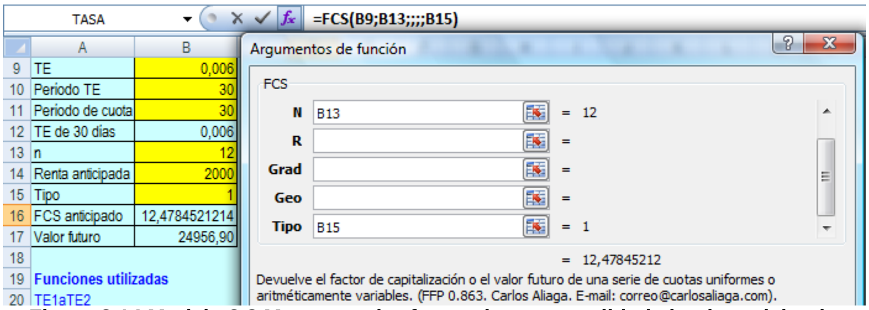


Figura 3.14 Modelo 3.2 Monto o valor futuro de una anualidad simple anticipada.

Valor presente de una anualidad simple anticipada

3. ¿Cuánto es el valor presente de 6 rentas mensuales anticipadas de 1 000 um cada una? Calcule este importe con una TEM de 0,02.

Solución

Con los datos $R_a = 1\,000$; TEM = 0,02 y n = 6; se calcula P con la fórmula (3.4).

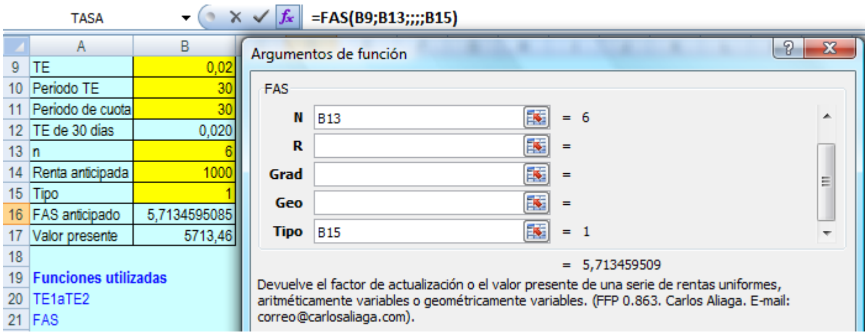


Figura 3.15 Modelo 3.3 Valor presente de una anualidad simple anticipada.

$P = R_a[(1+i)FAS_{0,02;6}]$ $\quad$ $P = 1\,000\left[1{,}02 \times \frac{1{,}02^{6}-1}{0{,}02\times 1{,}02^{6}}\right]$

$$P = 1\,000 \times 5{,}713459508 = 5\,713{,}46$$

Cálculo de las rentas uniformes anticipadas R_a

4. En el plazo de dos años se necesita acumular un monto de 20 000 um, con depósitos uniformes trimestrales anticipados; estos depósitos devengan una TEA de 0,08. Calcule el importe de la renta uniforme anticipada.

Solución

Con los datos $S = 20\,000$; $TET = 1{,}08^{3/12} - 1 = 0{,}019426547$ y n=8; se calcula R_a con la fórmula (3.5).

$$R_a = S[(1+i)^{-1}]FDFA_{0{,}019426547;8}$$

$$R_a = 20\,000\left[1{,}019426547^{-1} \times \frac{0{,}019426547}{1{,}019426547^{8}-1}\right]$$

$$R_a = 20\,000 \times 0{,}114521321 = 2\,290{,}43$$

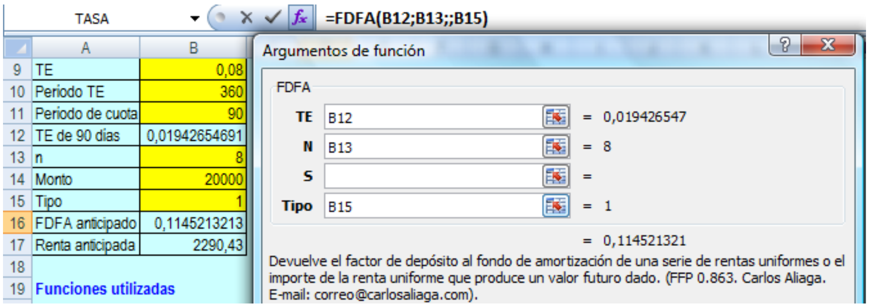


Figura 3.16 Modelo 3.4 Renta uniforme anticipada a partir de un valor futuro.

5. Se requiere acumular 50 000 um en el plazo tres años con depósitos uniformes bimestrales anticipados. Estos depósitos devengan una TEM de 0,01 ¿Cuánto es el importe de cada depósito mensual anticipado?

Solución

Con los datos S=50 000; TEB=0,0201 y n=18; se calcula R_a con la fórmula (3.5).

$R_a = S[(1+i)^{-1}]FDFA_{0,0201;18}$ $\qquad R_a = 50\ 000\left[1{,}021^{-1} \times \frac{0{,}0201}{1{,}0201^{18}-1}\right]$

$R_a = 50\ 000 \times 0{,}045741361 = 2\ 287{,}07$

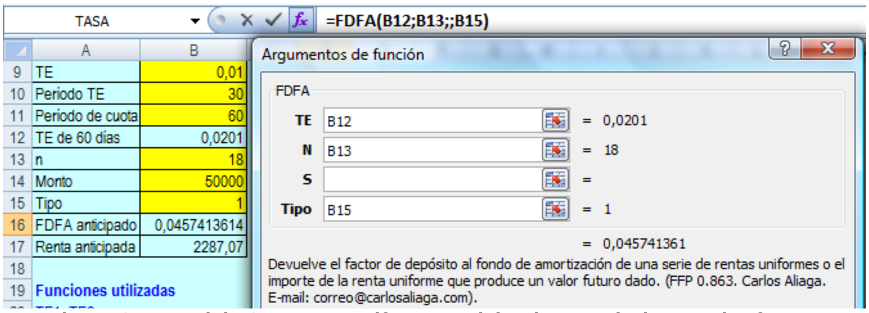


Figura 3.17 Modelo 3.5 Renta uniforme anticipada a partir de un valor futuro.

6. Calcule la cuota uniforme trimestral anticipada que amortizará un préstamo de 60 000 um en el plazo de una cuatro años. El préstamo devenga una TNA de 0,24 capitalizable bimestralmente.

Solución

Con los datos P=60 000; $TET=(1+0{,}04)^{90/60}-1=0{,}060596059$ y n=16; se calcula R_a con la fórmula (3.6).

$R_a = P\left[(1+i)^{-1}.FRC_{0,060596059;16}\right]$

$R_a = 60\ 000\left[1{,}060596059^{-1} \times \frac{0{,}060596059 \times 1{,}060596059^{16}}{1{,}060596059^{16}-1}\right]$

$R_a = 60\ 000 \times 0{,}093680894 = 5\ 620{,}85$

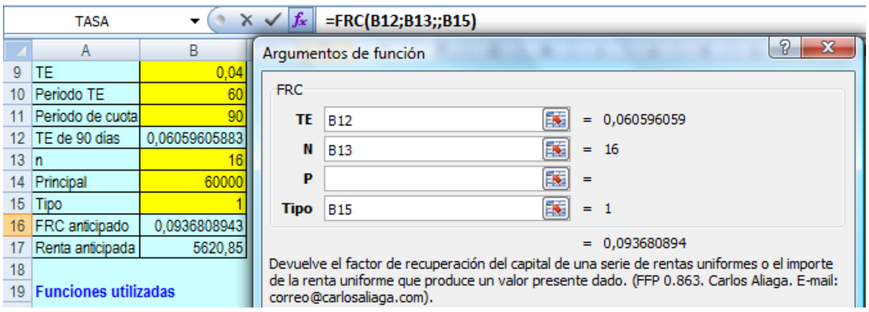


Figura 3.18 Modelo 3.6 Renta uniforme anticipada a partir de un valor presente.

7. Un automóvil cuyo precio al contado es 10 000 um se vende al crédito con una cuota inicial de 35%, amortizable en el plazo de un año con cuotas uniformes mensuales anticipadas. Calcule el importe de la cuota

uniforme si el financiamiento genera una TET de 0,03.

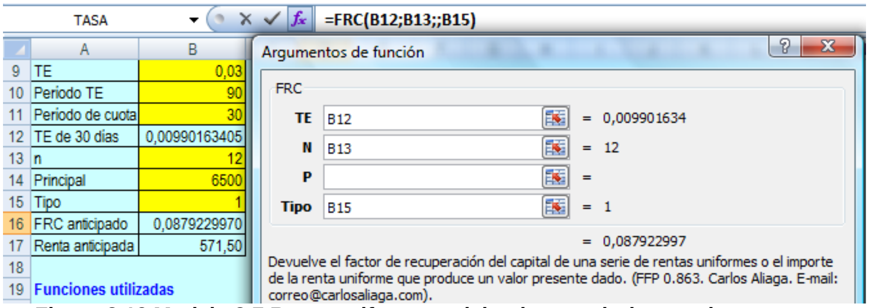
Solución

Con los datos P=6 500; $TEM = 1{,}03^{30/90} - 1 = 0{,}009901634$ y n=12; se calcula R_a con la fórmula (3.6).

$$R_a = P\left[(1+i)^{-1}.FRC_{0,009901634;12}\right]$$

$$R_a = 6\,500\left[1{,}009901634^{-1} \times \frac{0{,}009901634 \times 1{,}009901634^{12}}{1{,}009901634^{12} - 1}\right]$$

$$R_a = 6\,500 \times 0{,}087922997 = 571{,}5$$



	A	B
9	TE	0,03
10	Periodo TE	90
11	Periodo de cuota	30
12	TE de 30 días	0,00990163405
13	n	12
14	Principal	6500
15	Tipo	1
16	FRC anticipado	0,0879229970
17	Renta anticipada	571,50
18		
19	Funciones utilizadas	

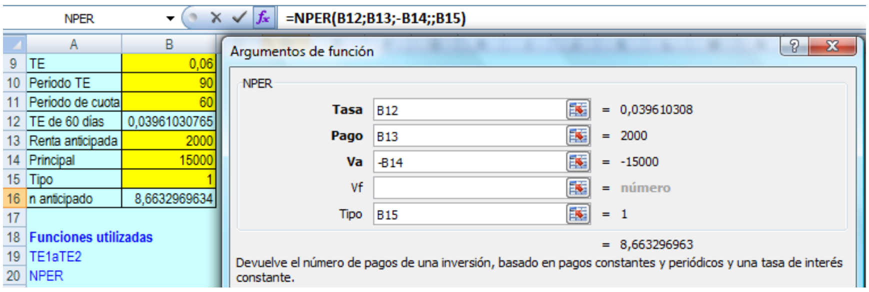
Figura 3.19 Modelo 3.7 Renta uniforme anticipada a partir de un valor presente.

Cálculo del número de rentas anticipadas n

8. ¿Con cuántas cuotas uniformes anticipadas se cancelará un préstamo bancario de 15 000 um, que genera una TNA de 0,24 capitalizable trimestralmente, si se efectúan pagos de 2 000 um al inicio de cada bimestre?

Solución

Con los datos P=15 000; $TEB = 1{,}06^{60/90} - 1 = 0{,}039610308$ y R_a=2 000; se calcula n con la fórmula (3.7).



	A	B
9	TE	0,06
10	Periodo TE	90
11	Periodo de cuota	60
12	TE de 60 días	0,03961030765
13	Renta anticipada	2000
14	Principal	15000
15	Tipo	1
16	n anticipado	8,6632969634
17		
18	Funciones utilizadas	
19	TE1aTE2	
20	NPER	

Figura 3.20 Modelo 3.8 Cálculo de n en una anualidad anticipada a partir de P.

$$n = -\frac{Log\left[1 - \frac{Pi}{R_a(1+i)}\right]}{Log(1+i)} \qquad n = -\frac{Log\left[1 - \frac{15\,000 \times 0{,}039610308}{2\,000 \times 1{,}039610308}\right]}{Log\ 1{,}039610308}$$

$$n = \frac{Log\ 0{,}714241665}{Log\ 1{,}039610308} = 8{,}663296999$$

9. Se necesita adquirir una máquina al contado cuyo costo se estima será 8 000 um en la fecha que se compre. ¿Dentro de cuántos meses podrá disponerse de ese importe, si se ahorra a inicios de cada mes un importe uniforme de 1 800 um en una institución financiera que remunera los ahorros con una TEM de 0,02? Si el valor de n fuese no entero:

   a. Calcule el importe de la última cuota anticipada cuyo valor es no entero y su respectiva fecha de pago.
   b. Calcule el importe de la última cuota anticipada no uniforme para cancelar el préstamo, cuando esta se redondea al entero inmediato anterior.
   c. Calcule el importe de la última cuota anticipada no uniforme para cancelar el préstamo, cuando esta se redondea al entero inmediato superior.

Solución

Con los datos S=8 000; TEM=0,02 y R_a=1 800; se calcula n con la fórmula (3.8).

$$n=\frac{Log\left[\frac{Si}{R_a(1+i)}+1\right]}{Log(1+i)} \qquad n=\frac{Log\left[\frac{8\,000\times 0{,}02}{1\,800\times 1{,}02}+1\right]}{Log\;1{,}02}=\frac{Log\;1{,}08714597}{Log\;1{,}02}=4{,}219434343$$

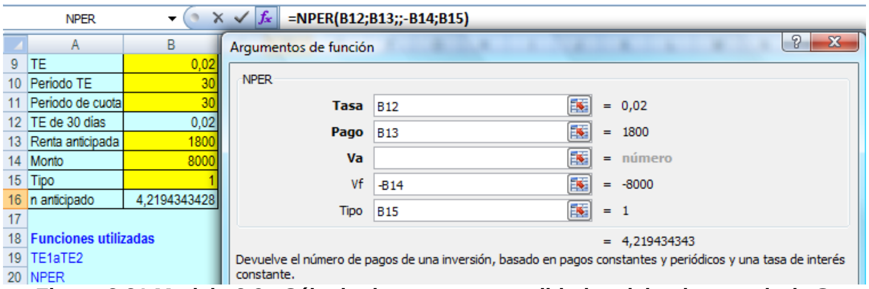


Figura 3.21 Modelo 3.9a Cálculo de n en una anualidad anticipada a partir de S.

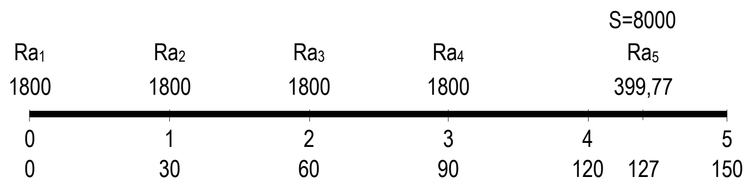
a. Importe de la última cuota anticipada. Como n es un número no entero y las cuotas anticipadas se pagan cada 30 días, la fecha de pago de la última cuota (la quinta), debe realizarse el día 126,58= 4,219434343 × 30 (aproximadamente el día 127), y su importe en esa fecha se calcula con la siguiente ecuación de equivalencia financiera.

$$\left\{1\,800\left[1{,}02\times\frac{1{,}02^4-1}{0{,}02}\right]\right\}\times 1{,}02^{0{,}219434343}+R_{a5}=8\,000$$

$$7\,600{,}226483+R_{a5}=8\,000$$

$$R_{a5}=399{,}77$$

Esto significa que el fondo se acumulará con 5 rentas, 4 rentas mensuales anticipadas de 1 800 um y la quinta que vence 7 días después de la cuarta renta anticipada, cuyo importe es 399,77 um y debe colocarse el día 127, lo que permitirá acumular el fondo de 8 000 um. Con estos datos el diagrama de la anualidad general, y la verificación del valor futuro, se presentan a continuación.



$$\left\{1\,800\left[1{,}02\times\frac{1{,}02^4-1}{0{,}02}\right]\right\}\times 1{,}02^{0{,}219434343}+399{,}77=S$$

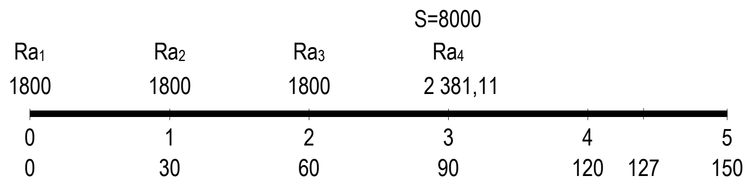
$$S=8\,000$$

b. Importe de la última cuota anticipada redondeada al entero inmediato anterior n=4 en el día 90.

$$1\,800\left[1{,}02\times FCS_{0{,}02;3}\right]+R_{a4}=8\,000$$

$$5\,618{,}89+R_{a4}=8\,000$$

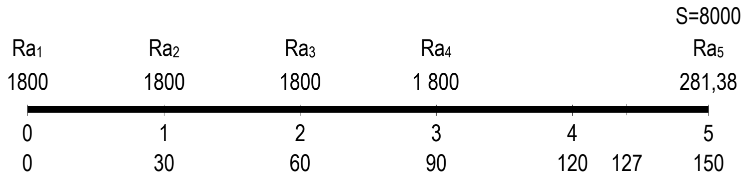
$$R_{a4}=2\,381{,}11$$



c. Importe de la última cuota anticipada redondeada al inmediato superior n=5 en el día 150.

$$1\,800\left[1{,}02\times FCS_{0{,}02;4}\right]\times 1{,}02+R_{a5}=8\,000$$

$$7\ 718{,}62 + R_{a5} = 8\ 000$$
$$R_{a5} = 281{,}38$$



J21 =ValorNoPer(E18;E20:I20;E21:I21;$B$11;$B$10)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
8	TE	0,02		F. Focal	126,583					
9	Periodo TE	30		Renta	1	2	3	4	5	
10	Periodo de rentas	30		Día	0	30	60	90	126,583	Monto
11	TE de 30 días	0,02		Renta	1800	1800	1800	1800	399,77	8000
12	Renta anticipada	1800								
13	Monto	8000		F. Focal	90					
14	Tipo	1		Renta	1	2	3	4		
15	n anticipado	4,219434343		Día	0	30	60	90	Monto	
16	Días	126,583		Renta	1800	1800	1800	2381,11	8000	
17										
18	N° de depósitos	4		F. Focal	150					
19	Monto el día 120	7567,27		Renta	1	2	3	4	5	
20	Monto el día 126,58	7600,23		Día	0	30	60	90	150	Monto
21	a. Depósito el día 126,58	399,77		Renta	1800	1800	1800	1800	281,38	8000
22										
23	N° de depósitos	3								
24	Monto el día 90	5618,89								
25	b. Depósito el día 90	2381,11								
26										
27	N° de depósitos	5								
28	Monto el día 150	7718,62								
29	c. Depósito el día 150	281,38								

Figura 3.22 Modelo 3.9b cálculo de n en una anualidad anticipada cuando su valor: es un número no entero, se redondea al inmediato inferior y al inmediato superior.

Cálculo de i (TIR) en una anualidad simple anticipada

10. Un automóvil cuyo precio al contado es 10 000 um, se vende a crédito sin cuota inicial y 12 pagos mensuales anticipados de 975,36 um. Calcule la TEA aplicada en este financiamiento.

Solución

Con los datos R_a=975,36; P=10 000; n=12; puede solucionarse el problema del siguiente modo:

$$10\ 000 = \frac{975{,}36}{(1+i)^0} + \frac{975{,}36}{(1+i)^1} + \frac{975{,}36}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{975{,}36}{(1+i)^{10}} + \frac{975{,}36}{(1+i)^{11}} \quad (1)$$

$$10\ 000 = 975{,}36\left[(1+i) \times \frac{(1+i)^{12}-1}{i(1+i)^{12}}\right] \quad (2)$$

La ecuación (1) es de grado 11 que no tiene solución algebraica, por lo tanto se asignarán valores a i hasta conseguir que el segundo miembro sea 10 000; para este proceso se utilizarán las fórmulas del FAS anticipado y la interpolación lineal.

i	FAS	Valor presente
0,029	10,3040832	10 050,19
0,031	10,2015854	9 950,22

En el cuadro anterior se observa que la tasa i es mayor que 0,029 pero menor que 0,031; por lo tanto se interpolará entre estos dos valores para hallar su valor aproximado.

Al hacer

$$x_1 = 0{,}029 \qquad y_1 = 10\ 050{,}19$$
$$x = ? \qquad y = 10\ 000{,}00$$
$$x_2 = 0{,}031 \qquad y_2 = 9\ 950{,}22$$

Y al aplicar la fórmula (2.8) se tiene:

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}(x_2 - x_1)$$

$$x = 0{,}029 + \frac{10\ 000 - 10\ 050{,}19}{9\ 950{,}22 - 10\ 050{,}19}(0{,}031 - 0{,}029)$$

$$x = 0{,}03$$

La tasa aproximada linealmente al verdadero valor de i=TIR=TEM es 0,03. Para obtener la respuesta al problema planteado, debe hallarse la TEA a partir de la TEM calculada.

$TEA = (1 + TEM)^{360/30} - 1 \qquad TEA = (1 + 0{,}03)^{360/30} - 1 = 0{,}42576$

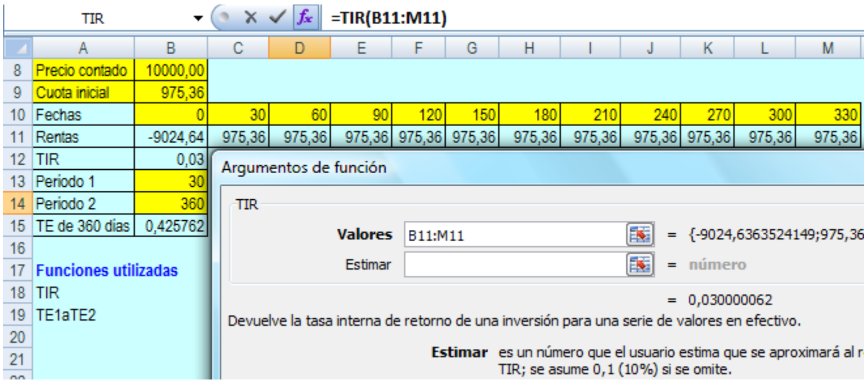


Figura 3.23 Modelo 3.10 TIR de una anualidad simple anticipada que se obtuvo con la función TIR.

3.10 Listado de fórmulas

Fórmula	Obtiene
$R_a = \frac{R}{1+i}$	(3.1) Renta anticipada a partir de una renta vencida.
$R = R_a(1+i)$	(3.2) Renta vencida a partir de una renta anticipada.
$S = R_a\left[(1+i) \times \frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$	(3.3a) Valor futuro de una anualidad simple anticipada.
$S = R_a\left[(1+i).FCS_{i;n}\right]$	(3.3b) Valor futuro de una anualidad simple anticipada con el FCS.
$P = R_a\left[(1+i) \times \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$	(3.4a) Valor presente de una anualidad simple anticipada.
$P = R_a\left[(1+i).FAS_{i;n}\right]$	(3.4b) Valor presente de una anualidad simple anticipada con el FAS.
$R_a = S\left[(1+i)^{-1} \times \frac{i}{(1+i)^n-1}\right]$	(3.5a) Renta uniforme anticipada a partir de S.
$R_a = S[(1+i)^{-1}]FDFA_{i;n}$	(3.5b) Renta uniforme anticipada a partir de S con el FDFA.
$R_a = P\left[(1+i)^{-1} \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$	(3.6a) Renta uniforme anticipada a partir de P.
$R_a = P\left[(1+i)^{-1}.FRC_{i;n}\right]$	(3.6b) Renta uniforme anticipada a partir de P con el FRC.
$n = -\frac{Log\left[1-\frac{Pi}{R_a(1+i)}\right]}{Log(1+i)}$	(3.7) Número de períodos de renta de una anualidad simple anticipada a partir de P.
$n = \frac{Log\left[\frac{Si}{R_a(1+i)}+1\right]}{Log(1+i)}$	(3.8) Número de períodos de renta de una anualidad simple anticipada a partir de S.

Preguntas de autoevaluación

1. ¿Qué es una anualidad anticipada? Ponga cinco ejemplos de anualidades anticipadas.

2. ¿Cuál es la principal diferencia entre una anualidad simple vencida y una anualidad simple anticipada? Comente.

3. Si conoce una renta simple vencida y su respectiva tasa de interés que coincide con el período de renta, ¿cómo convierte una renta vencida en una renta anticipada de una anualidad?

4. Qué factores se utilizan para convertir:

    - Un valor presente, en un valor futuro equivalente.
    - Un valor futuro, en un valor presente equivalente.
    - Un valor presente, en rentas uniformes anticipadas equivalentes.
    - Un valor futuro, en rentas uniformes anticipadas equivalentes.
    - Rentas uniformes anticipadas, en un valor presente equivalente.
    - Rentas uniformes anticipadas, en un valor futuro equivalente.

Escriba las fórmulas de cada uno de los factores financieros.

5. Excel tiene funciones financieras que efectúan los cálculos de anualidades, identifique estas funciones. ¿Qué argumento utiliza Excel para convertir anualidades vencidas en anualidades anticipadas? Comente.

6. Demuestre la fórmula del monto de una anualidad simple, con rentas uniformes anticipadas.

7. Demuestre la fórmula del valor presente de una anualidad simple, con rentas uniformes anticipada.

8. Demuestre la fórmula de la renta uniforme anticipada a partir de S, de una anualidad simple.

9. Demuestre la fórmula de la renta uniforme anticipada a partir de P, de una anualidad simple.

10. Demuestre las fórmulas de n en una anualidad simple anticipada, a partir de P, y a partir de S.

11. ¿Qué alternativas pueden adoptarse para interpretar n cuando su valor es un número no entero, en una anualidad simple anticipada? Comente.

12. ¿Cuál es el procedimiento que se adopta para calcular la tasa implícita (TIR) en una anualidad simple anticipadas? Ponga un ejemplo.

13. Demuestre que:

a. $\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i} - 1 = (1+i)\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]$ b. $\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}-1}{i} + 1 = (1+i)\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}}\right]$

Problemas propuestos

1 Transformaciones financieras

1. Con una TEM de 0,01 y un horizonte temporal de 10 meses con rentas mensuales anticipadas de 1 um, obtenga los valores de los siguientes factores anticipados: FRC, FAS, FCS y FDFA.

2. Con una TEA de 0,12682503 obtenga los valores de los factores anticipados: FRC, FAS, FCS y FDFA. El horizonte temporal se inicia el 8 de marzo y termina el 4 de setiembre del mismo año, y los períodos de renta son de 30 días. Realice nuevamente los cálculos anteriores, pero ahora utilice una TEA de 0,19561817 y determine si dichos factores aumentaron o disminuyeron. Emita sus conclusiones con relación a las variaciones observadas en los factores financieros.

3. Efectúe las seis transformaciones financieras equivalentes entre stocks y flujos de efectivo, con un capital inicial de 5 000 um, una TNA de 0,24 con capitalización mensual y 5 rentas uniformes trimestrales anticipadas.

4. Con una TEA de 0,268241795, un horizonte temporal de 720 días y rentas uniformes mensuales anticipadas de 1 um, calcule los valores de los 4 factores financieros de anualidades anticipadas.

5. Con una TEM de 0,01 y cuotas trimestrales uniformes anticipadas, calcule los valores de los 4 factores financieros de anualidades anticipadas, en un horizonte temporal que se inicia el 8 de marzo y termina el 31 de mayo del siguiente año (no bisiesto).

6. Con los datos $P=1\,000$ um, $TET=0{,}03$ y $n=4$ trimestres, calcule los importe de R_a, S y P, utilice los factores financieros: FRC, FCS, FDFA y FAS.

7. Con una $TEM=0{,}0201$ y $n=12$ quincenas, calcule los siguientes factores financieros anticipados: FRC, FCS, FDFA y FAS.

8. Convierta una anualidad vencida con rentas uniformes mensuales vencidas de 506,58 um cada en un horizonte temporal de seis meses, en una anualidad con rentas mensuales anticipadas equivalentes. Utilice una TET de 0,04.

9. Convierta una anualidad anticipada con rentas uniformes anticipadas de 500,00 um cada una en un horizonte temporal de seis meses, en una anualidad con rentas mensuales vencidas equivalentes. Utilice una TET de 0,04.

2 Monto de una anualidad simple anticipada

10. En un cuatrimestre se efectúan depósitos de 1 000 um al inicio de cada mes, en un banco que remunera esos depósitos con una TNA de 0,09 capitalizable mensualmente. ¿Qué monto se acumulará al final del cuarto mes? ¿Cuánto es el interés de esa operación? Prepare la tabla de acumulación del monto.

11. El primer día útil de cada mes la compañía Prodinsa coloca en un banco el 20% de sus excedentes de caja que ascienden a 5 000 um. Si por dichos depósitos percibe una TEA de 0,09, ¿cuánto acumulará al término del sexto mes? ¿Cuánto será el interés de esa operación? Prepare la tabla de acumulación del monto.

12. ¿Cuánto es el monto al final de un año, si en ese plazo se efectúan depósitos de 2 500 um al inicio de cada 45 días en una institución bancaria; estos depósitos devengan una TNA de 0,12 con capitalización trimestral? Si los datos anteriores se mantienen, pero la capitalización fuese bimestral ¿cuánto es el nuevo monto?

13. Una persona deposita en una cuenta de ahorros a inicios de cada trimestre un importe uniforme de 2 000 um. ¿Qué monto acumulará en el plazo de dos años si percibe una TNA de 0,09 capitalizable mensualmente? Prepare la tabla de acumulación del monto.

14. ¿Qué monto se acumulará durante 3 años consecutivos al depositar a inicio de cada mes 1 000 um, en un banco que remunera esos depósitos con una TNA de 0,06 capitalizable trimestralmente? ¿Cuánto es el interés generado en el sétimo mes? Prepare la tabla de acumulación de monto para verificar sus respuestas.

15. ¿Cuánto es el monto al final del sexto mes, si se efectúan depósitos de 1 000 um a inicios de cada mes? Estos depósitos devengan una TNA de 0,12 con capitalización bimestral. ¿Cuánto es el interés del sexto mes?

16. ¿Qué monto se acumulará en una cuenta de ahorros si a inicios de mes y durante 8 meses consecutivos, se depositan 800 um en un banco que remunera a esos ahorros con una TEA de 0,12? ¿Cuánto es el interés generado durante la octava cuota?

3 Valor presente de una anualidad simple anticipada

17. El alquiler de un local comercial es 500 um, pago que debe efectuarse a inicios de cada mes durante un año. El dueño del local propone al arrendatario efectuar un descuento en las cuotas mensuales con una TEA de 0,15 en el caso que abone anticipadamente los alquileres correspondientes a un año. Calcule el valor presente de los doce pagos anticipados. ¿Cuánto es el valor actual de la cuota anticipada número 12?

18. Un crédito que devenga una TNA de 0,12 capitalizable mensualmente fue contratado para amortizarse con 20 imposiciones trimestrales uniformes de 250 um cada una. En la fecha de pago de la imposición 12, el cliente decide cancelarla conjuntamente con las cuotas insolutas, ¿cuánto es el importe total por cancelar en esa fecha que incluye la cuota 12? Las cuotas anticipadas se descuentan con la misma tasa que devenga el préstamo. ¿Cuánto es el valor actual de la cuota anticipada número 9?

19. ¿Cuánto es el precio de contado equivalente de una máquina que se vende al crédito sin cuota inicial y 12 cuotas mensuales anticipadas de 200 um cada una? ¿Cuánto es el valor actual de la cuota anticipada número 12? El costo de oportunidad es una TEA de 0,14.

20. Calcule el importe del interés total por pagar en la amortización de un préstamo que devenga una TET de 0,03 durante medio año con imposiciones uniformes mensuales de 500 um. ¿Cuánto es el interés del préstamo al vencimiento de la segunda cuota anticipada?

21. Para la adquisición de una máquina se dispone de 20% de su precio de contado. El saldo será financiado por el mismo proveedor con 12 imposiciones iguales mensuales de 500 um cada una. El financiamiento devenga una TES (semestral) de 0,06. Calcule el precio de contado de la máquina.

22. Calcule el valor presente de una anualidad de 20 rentas uniformes trimestrales anticipadas de 2 000 um cada una, utilice una TEM de 0,015. Prepare una tabla donde muestre los valores actuales de las 20 rentas anticipadas.

4 Renta uniforme anticipada a partir de S

23. La compañía Jacobs tomó la decisión de adquirir, dentro de seis meses, una camioneta para distribuir sus productos (se estima que el precio de la camioneta en esa fecha será 13 000 um). Para este efecto decide ahorrar mensualmente, en ese plazo, una determinada cantidad uniforme a inicio de cada mes. Calcule el importe de la cuota uniforme anticipada que le permita acumular dicho fondo a fines del sexto mes, si sus ahorros devengan una TEA de 0,08. Prepare la tabla de acumulación del monto

24. Se estima que dentro de 4 meses se comprará una máquina cuyo precio será 5 000 um en esa fecha. Si se empieza hoy, ¿qué cantidad uniforme deberá depositarse cada 30 días durante ese período de tiempo, para acumular dicho fondo? Prepare la tabla de acumulación del monto. El fondo devenga una TEA de 0,1.

25. Calcule el importe de la imposición uniforme que colocada cada mes en un banco, con una TNA de 0,12 capitalizable trimestralmente durante el plazo de 4 años, permita acumular un fondo para reemplazar una máquina cuyo precio se estima en 32 000 um al finalizar ese período de 4 años. ¿Cuánto es el importe del interés del fondo generado en ese plazo?

26. Calcule el importe de la renta uniforme que colocada al inicio de cada trimestre durante 4 años permita acumular un monto de 20 000 um; esta operación devenga una TEA de 0,12. ¿Cuánto es el importe del interés del fondo generado en ese plazo? ¿Cuánto es el interés generado en el último trimestre del cuarto año?

5 Renta uniforme anticipada a partir de P

27. Un préstamo de 50 000 um debe cancelarse en el plazo de un año con cuotas uniformes mensuales anticipadas. El préstamo devenga una TEB (bimestral) de 0,02. Calcule el importe de la cuota uniforme anticipada. ¿Cuánto es el interés de la segunda cuota anticipada?

28. La empresa Equipos S.A. vende máquinas herramientas al contado en 10 000 um, pero debido a que consiguió un financiamiento del exterior planea efectuar ventas al crédito sin cuota inicial y seis cuotas mensuales uniformes anticipadas. Si la TEA que cargará al financiamiento es 0,25, calcule el importe de las

cuotas uniformes del programa de ventas a plazo. ¿Cuánto es el interés de la segunda cuota anticipada?

29. La empresa Electrofax que vende grupos electrógenos al contado en 3 000 um, planea efectuar ventas al crédito sin cuota inicial y 12 cuotas mensuales uniformes anticipadas. El financiamiento devenga una TNA de 0,12 capitalizable bimestralmente. ¿Cuánto es el importe de la cuota mensual? ¿Cuánto es el interés de la segunda cuota anticipada?

6 Cálculo de n a partir de P en una anualidad anticipada

30. ¿Cuántas cuotas mensuales anticipadas de 1 486,34 um serán necesarias para cancelar un préstamo de 8 500 um? La deuda devenga una TNA de 0,24 con capitalización trimestral.

31. ¿Cuántas cuotas mensuales anticipadas de 1 630,63 um serán necesarias para cancelar un préstamo de 50 000 um? El préstamo devenga una TEA de 0,12.

32. Un electrodoméstico tiene un precio de 2 000 um al contado. Para incrementar las ventas se piensa ofrecer al crédito sin cuota inicial y cuotas mensuales uniformes anticipadas de 150 um; el crédito devenga una TEM de 0,01.

a. ¿Cuántos pagos deben realizarse? Si el número de pagos fuese un número no entero, diga en qué fecha debe cancelarse la última cuota (no entera), y cuál es el importe por cancelar en esa fecha.

b. Si el número de pagos fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato superior; calcule el importe del último pago mensual y el día del pago.

c. Si el número de pagos fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato inferior; calcule el importe del último pago mensual y el día de pago.

33. ¿Cuántas cuotas debe tener un programa de crédito que financia un capital de 50 000 um, con cuotas uniformes mensuales anticipadas de 3 600 um? El crédito devenga una TEM de 0,01.

   a. Si el número de cuotas fuese un número no entero, diga en qué fecha debe cancelarse la última cuota (no entera), y calcule el importe por cancelar en esa fecha.
   b. Si el número de cuotas fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato superior y calcule el importe del último pago mensual.
   c. Si el número de cuotas fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato inferior y calcule el importe del último pago mensual.

7. Cálculo de n a partir de S en una anualidad anticipada

34. ¿Con cuántas cuotas se acumulará un monto de 20 000 um si se efectúan depósitos quincenales anticipados de 1 613,39 um? Los depósitos devengan una TNA de 0,12 capitalizable mensualmente. Prepare la tabla de acumulación del monto.

35. ¿Cuántos depósitos mensuales anticipados de 2 200 um deben efectuarse en un banco para acumular un monto de 20 000 um, si devengan una TEM de 0,01?

   a. Si el número de depósitos fuese un número no entero, diga en qué fecha debe efectuarse el último depósito, y cuánto es su importe.
   b. Si el número de depósitos fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato superior, diga en qué fecha debe efectuarse el último depósito y cuánto es su respectivo importe.
   c. Si el número de depósitos fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato inferior, diga en qué fecha debe efectuarse el último depósito y cuánto es su respectivo importe.

8 Cálculo de i (TIR) en una anualidad anticipada

36. Por campaña escolar una casa comercial ofrece "paquetes escolares" en productos, por un importe de 1 200 um que se amortizará en el plazo de un año con cuotas mensuales anticipadas de 120 um cada una. ¿Cuál es la TEM cargada?

37. Una máquina puede adquirirse al contado en 3 000,02 um y al crédito con seis cuotas uniformes mensuales anticipadas de 525,08 um cada una. Calcule la TNA con capitalización mensual, aplicada en esta operación.

Resumen del capítulo

Una anualidad anticipada es una serie de flujos o rentas que empiezan a inicios del período de renta. Son ejemplos de anualidades anticipadas: el pago de alquileres, pensiones de enseñanza, pólizas de seguros de vida, etc.

En un mismo horizonte temporal, con iguales importes de rentas, tasas de interés y períodos de tasas, la diferencia entre una anualidad vencida y otra anticipada radica en que en el primer caso, la renta vence al final de cada período, mientras que en el segundo, la renta vence a inicios del período, lo que origina en el momento 0 un desembolso menor al pactado (P-R), y en el último período, el derecho a percibir el beneficio hasta su vencimiento, como sucede, por ejemplo, con las pensiones de enseñanza.

Si se conoce una renta uniforme vencida R, la renta uniforme anticipada o imposición R_a puede calcularse al descontar aquélla un período de renta con la tasa efectiva de ese período; recíprocamente una renta anticipada R_a puede convertirse en vencida R al capitalizarla durante un período. Al convertir una anualidad simple anticipada en vencida, son aplicables los factores financieros de las anualidades vencidas.

El conjunto de rentas que constituyen una anualidad simple anticipada puede ser: capitalizada para formar el monto de una anualidad anticipada y descontada, para constituir el valor presente de una anualidad anticipada. El monto se calcula con FCS anticipado, y el valor presente con el FAS anticipado.

Si se conocen un valor futuro o un valor presente, pueden calcularse rentas uniformes anticipadas. Para calcular una renta uniforme anticipada a partir de un valor futuro, se utiliza el FDFA anticipado. Para calcular una renta uniforme anticipada a partir de un valor presente, se utiliza el FRC anticipado.

Puede calcularse el número de rentas uniformes anticipadas, a partir de un valor presente o de un valor futuro.

Cuando la incógnita en una anualidad simple anticipada es la tasa de interés, esta tasa de interés o TIR, se calcula con el método de “prueba y error”.

Capítulo 4

ANUALIDADES DIFERIDAS

En este capítulo se estudian las anualidades diferidas vencidas, las anualidades diferidas anticipadas y sus relaciones, cuando se convierte un stock de efectivo en flujos y viceversa.

Objetivos del capítulo

Al terminar este capítulo el lector estará capacitado para:

4.1 Definir una anualidad simple diferida y el plazo diferido.

4.2 Hallar el monto de una anualidad simple diferida y anticipada a partir de un conjunto de rentas uniformes vencidas o anticipadas.

4.3 Calcular el valor presente de un conjunto de rentas uniformes simples diferidas vencidas.

4.4 Calcular el valor presente de un conjunto de rentas uniformes simples diferidas anticipadas.

4.5 Calcular las rentas uniformes diferidas vencidas y anticipadas equivalentes de un stock de efectivo ubicado en el futuro, de una anualidad simple diferida vencida y de una anualidad diferida anticipada.

4.6 Calcular las rentas uniformes diferidas vencidas y rentas uniformes diferidas anticipadas, equivalentes de un stock de efectivo ubicado en el presente de una anualidad simple diferida.

4.7 Calcular el número de períodos de renta y el número de períodos diferidos, en una anualidad simple diferida y en una anualidad simple diferida anticipada.

4.8 Calcular la tasa implícita de una anualidad simple diferida (TIR).

4.9 Plantear modelos en Excel que resuelven problemas de anualidades simples diferidas.

Simbología

Los nuevos símbolos que se utilizan en el presente capítulo son los siguientes:

k	Número de períodos del subhorizonte temporal diferido de la anualidad.
n_c	Número de cuotas o rentas de la anualidad.
n	Número de períodos de tasa en el horizonte temporal de una anualidad simple diferida.
FF	Fecha focal.
$FAS_{i;n_c}FSA_{i;k}$	Factor de actualización de la serie uniforme de una anualidad simple diferida vencida bajo un régimen de interés compuesto, FAS diferido vencido.
$FAS_{i;n}\left[\frac{1+i}{(1+i)^k}\right]$	Factor de actualización de la serie uniforme de una anualidad simple diferida anticipada, FAS diferido anticipado.
$FSC_{i;k}FRC_{i;n}$	Factor de recuperación del capital de una anualidad simple diferida vencida, FRC diferido vencido.
$\left[\frac{(1+i)^k}{1+i}\right]FRC_{i;n}$	Factor de recuperación del capital de una anualidad simple diferida anticipada, FRC diferido anticipado.

4.1 Anualidad simple diferida

Cuando en un contrato de crédito u operación similar, que debe amortizarse con cuotas uniformes, por acuerdo expreso de las partes, el pago de estas rentas empieza después del vencimiento de uno o varios períodos de tasa, contados a partir del inicio del plazo pactado, se genera una anualidad diferida. Una anualidad simple diferida es la unión de dos anualidades simples consecutivas, la primera en la que no se realiza pago alguno pero se devenga interés y la segunda que es una anualidad simple, la misma que a su vez puede ser vencida o anticipada.

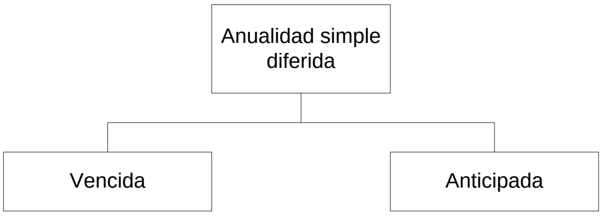


Figura 4.1 Clasificación de una anualidad simple diferida.

Una anualidad es *simple diferida vencida* cuando después del plazo diferido se realizan cuotas uniformes simples vencidas, como se muestra en la figura 4.2.

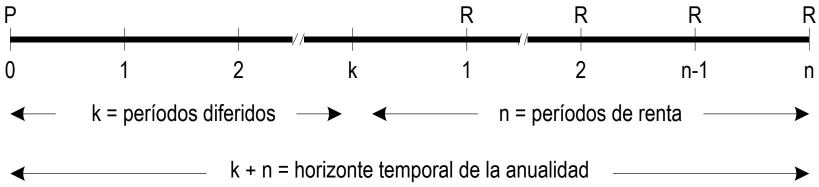


Figura 4.2 Anualidad simple diferida vencida.

Una anualidad es *simple diferida anticipada* cuando después del plazo diferido se realizan cuotas uniformes simples anticipadas, como se muestra en la figura 4.3.

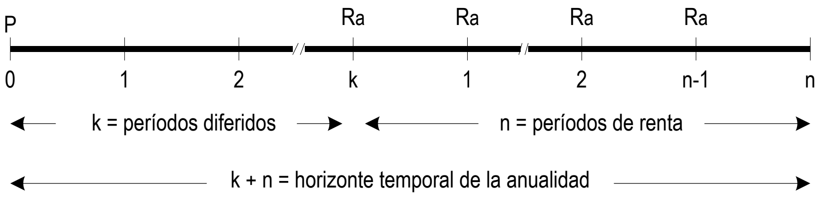


Figura 4.3 Anualidad simple diferida anticipada.

Plazo diferido

Es el número de períodos diferidos k, el intervalo de tiempo entre el inicio del contrato de un préstamo y el primer pago -contado en períodos de renta-, durante el cual no se realiza pago alguno, pero el capital inicial se capitaliza al vencimiento de cada período diferido, para luego distribuirlo por equivalencia financiera entre el número de cuotas insolutas. Por lo tanto, al vencimiento de los períodos diferidos, una anualidad diferida se convierte en una anualidad simple vencida o anticipada, según las rentas sean vencidas o anticipadas respectivamente.

4.2 Monto de una anualidad simple diferida

Como se observa en los gráficos 4.2 y 4.3, cuando se tienen como datos una tasa efectiva i, el número de períodos de renta n que constituye el plazo de la anualidad simple y las rentas sean estas vencidas R, o anticipadas R_a, el monto de la anualidad es el mismo que corresponde al monto de la anualidad no diferida, sea esta vencida o anticipada; esto es así porque durante el plazo diferido no existen rentas y por lo tanto sus montos se calculan con las fórmulas (2.1a) y (3.3a).

$$\boxed{S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]} \quad (2.1a) \qquad \boxed{S = R_a\left[(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]} \quad (3.3a)$$

Las fórmulas (2.1a) y (3.3a) calculan el valor futuro o monto de una anualidad simple diferida vencida y de una anualidad simple diferida anticipada, respectivamente, en la cual i y n tienen que ser del mismo período de tiempo de R_a.

Ejemplo 4.1

Dentro de un año se recibirá durante un plazo quinquenal una renta mensual de 250 um, cuyo importe deberá depositarse en un banco que remunera esos depósitos con una TEA de 0,08. Calcule el monto que se acumulará al final de ese quinquenio en el caso que las rentas sean vencidas y en el caso que las rentas sean anticipadas.

Solución

Con los datos $R=250$; $R_a=250$; $TEM = 1{,}08^{1/12} - 1 = 0{,}00643403$; $n=60$ y con las fórmulas (2.1a) y (3.3a) se calcula R y R_a.

Rentas vencidas:

$$S = R.FCS_{0,00643403;60} \qquad S = 250\left[\frac{1{,}00643403^{60} - 1}{0{,}00643403}\right] = 18\,236{,}16$$

Rentas anticipadas:

$$S = R_a\left[(1+i)FCS_{0,00643403;60}\right] \qquad S = 250\left[1{,}00643403 \times \frac{1{,}00643403^{60} - 1}{0{,}00643403}\right]$$

$$S = 18\,353{,}49$$

4.3 Valor presente de una anualidad simple diferida vencida

El valor presente de esta anualidad puede obtenerse al tomar como *fecha focal* el final del plazo diferido, o el momento cero o inicio del horizonte temporal de la anualidad. La fecha focal es el momento del horizonte temporal de la anualidad, que se elije para plantear una ecuación de equivalencia financiera; es el momento en que se realiza la evaluación financiera que implica capitalizaciones o actualizaciones de flujos de caja ubicados en fechas diferentes de la fecha focal.

Fecha focal: final del plazo diferido k

En este punto del tiempo la ecuación de equivalencia financiera para obtener el valor presente de una anualidad simple diferida, se obtiene al igualar el principal capitalizado, con el conjunto de rentas futuras descontadas a ese momento de evaluación.

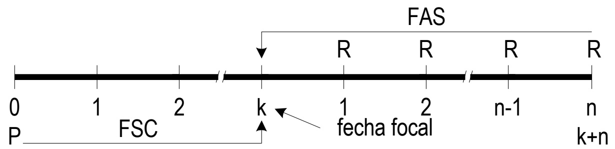


Figura 4.4 Equivalencia financiera con fecha focal al final del plazo diferido.

$$P(1+i)^k = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]\left[\frac{1}{(1+i)^k}\right]$$

Fecha focal: momento cero del horizonte temporal

En este punto del tiempo la ecuación de equivalencia financiera se obtiene al descontar transitoriamente las rentas al final del plazo diferido k con el FAS; y de ese stock futuro se trae al presente con el FSA.

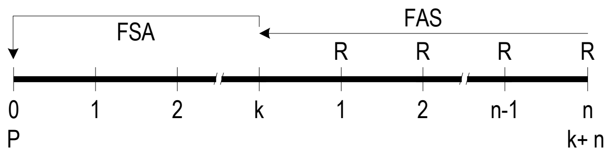


Figura 4.5 Equivalencia financiera con fecha focal al inicio del horizonte temporal.

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]\left[\frac{1}{(1+i)^k}\right]$$

Con ambas ecuaciones de equivalencia financiera se llega a:

$$\boxed{P = R\left[\frac{1}{(1+i)^k}\times\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]} \quad (4.1a)$$

La fórmula (4.1a) calcula el valor presente de una anualidad simple diferida vencida en la cual i, n y k deben ser del mismo período de R.

El factor de actualización de la serie uniforme de una anualidad simple diferida vencida FAS

En la fórmula (4.1a) los términos entre corchetes constituyen el Factor de Actualización de la Serie uniforme (FAS), por lo tanto la fórmula (4.1a) se representa:

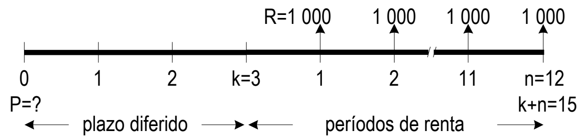
$$\boxed{P = R\left[FSA_{i;k}.FAS_{i;n}\right]} \quad (4.1b)$$

La fórmula (4.1b) se lee: "el FAS de una anualidad simple diferida vencida a una tasa i por período durante n períodos de renta y k períodos diferidos, transforma una serie uniforme de rentas vencidas R en un valor presente

P". El FAS diferido vencido: $FAS = \left[\frac{1}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$ es el valor actual de una anualidad cuyas rentas uniformes simples diferidas vencidas son de 1 um.

Ejemplo 4.2
Calcule el valor presente de una anualidad de rentas mensuales uniformes vencidas de 1 000 um, por recibir a partir del cuarto mes y durante 12 meses consecutivos. Utilice una TEM de 0,02.

Solución
Con los datos R=1 000; TEM=0,02; k=3 y n=12 se calcula P con la fórmula (4.1a).

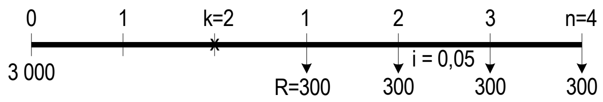


$P = R\left[\frac{1}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$ $\quad P = 1\ 000\left[\frac{1}{1{,}02^3} \times \frac{1{,}02^{12} - 1}{0{,}02 \times 1{,}02^{12}}\right]$

$$P = 1\ 000[0{,}9423223346 \times 10{,}57534122] = 9\ 965{,}38$$

Ejemplo 4.3
Un activo fijo se ofrece a la venta con una cuota inicial de 3 000 um y cuotas mensuales vencidas de 300 um que deben pagarse durante cuatro meses consecutivos. El primer pago se efectuará después de 3 meses de haberse cancelado la cuota inicial. ¿Cuál es el precio de contado equivalente, si el costo de oportunidad es una TEM de 0,05?

Solución
Con los datos R=300; TEM=0,05; k=2 y n=4 y se calcula P con la fórmula (4.1a).



$P = R\left[\frac{1}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] + 3000$ $\qquad P = 300\left[\frac{1}{1{,}05^2} \times \frac{1{,}05^4 - 1}{0{,}05 \times 1{,}05^4}\right] + 3\ 000$

$$P = 300[0{,}9070294 \times 3{,}545950504] + 3\ 000$$

$$P = 3\ 964{,}88$$

4.4 Valor presente de una anualidad simple diferida anticipada

Para obtener la fórmula del valor presente de una anualidad simple diferida anticipada, puede remplazarse R por R_a en la fórmula (4.1a), del siguiente modo.

$$P = R\left[\frac{1}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \qquad (4.1a)$$

$$P = R_a(1+i)\left[\frac{1}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$ Al reemplazar R por $R_a(1+i)$

$$P = R_a\left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$\boxed{P = R_a\left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]} \qquad (4.2a)$$

La fórmula (4.2a) calcula el valor presente de una anualidad simple diferida anticipada en la cual i, n y k deben ser del mismo período de R_a.

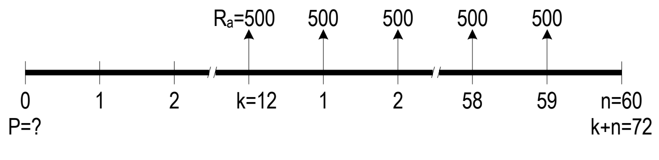
El factor de actualización de la serie uniforme de una anualidad simple diferida anticipada FAS
En la fórmula (4.2a) los términos entre corchetes constituyen el Factor de Actualización de la Serie uniforme de una anualidad simple diferida anticipada (FAS), por lo tanto la fórmula (4.2a) se representa:

$$\boxed{P = R_a\left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times FAS_{i;n}\right]} \qquad (4.2b)$$

La fórmula (4.2b) se lee: "el FAS de una anualidad simple diferida anticipada a una tasa i por período durante n períodos de renta y k períodos diferidos, transforma una serie uniforme de rentas anticipadas Ra en un valor presente P". El FAS diferido anticipado: $FAS = \left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$ es el valor actual de una anualidad cuyas rentas uniformes simples anticipadas son de 1 um.

Ejemplo 4.4
¿Qué importe debe colocarse hoy en un banco para disponer después de transcurrido un año, una renta mensual de 500 um al comienzo de cada mes, durante los cinco años siguientes? Este capital devenga una TEM de 0,02.

Solución
Con los datos R_a=500; TEM=0,02; k=12 y n=60 se calcula P con la fórmula (4.2a).



$$P = R_a\left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \qquad P = 500\left[\frac{1+0{,}02}{(1+0{,}02)^{12}} \times \frac{1{,}02^{60} - 1}{0{,}02 \times 1{,}02^{60}}\right]$$

$$P = 500[0{,}8042630391 \times 34{,}76088668]$$

$$P = 13\ 978{,}45$$

4.5 Renta uniforme diferida a partir de S

Las rentas diferidas en función de S, ya sean de una anualidad diferida vencida o de una anualidad diferida anticipada, se obtienen del mismo modo que sus similares no diferidos; por lo tanto le son aplicables las fórmulas (2.3a) y (3.5a) que calculan las rentas vencidas y anticipadas equivalentes de un monto dado, respectivamente.

$$\boxed{R = S\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]} \quad (2.3a) \qquad \boxed{R_a = S\left[(1+i)^{-1} \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]} \quad (3.5a)$$

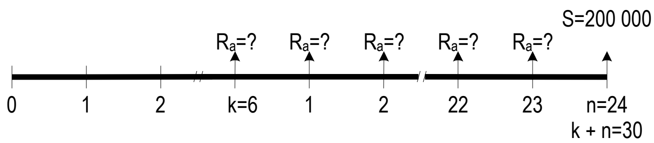
Las fórmulas (2.3a) y (3.5a) calculan las rentas vencidas diferidas y anticipadas diferidas respectivamente, a partir de un valor futuro.

Ejemplo 4.5

En un plazo de dos años y medio se requiere acumular un fondo de 200 000 um; en este plazo se depositarán rentas uniformes mensuales que devengan una TEM de 0,01. Si durante los seis primeros períodos de renta no se efectúan depósitos algunos, ¿cuáles son los importes de las rentas uniformes vencidas y anticipadas que acumularán dicho importe?

Solución

Con los datos S=200 000; TEM=0,01; k=6 y n=24 se calculan R y R_a con las fórmulas (2.3a) y (3.5a).



Importe de la renta vencida:

$$R = S\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad R = 200\ 000\left[\frac{0{,}01}{1{,}01^{24} - 1}\right] = 200\ 000 \times 0{,}037073472 = 7\ 411{,}69$$

Importe de la renta anticipada:

$$R_a = S\left[(1+i)^{-1} \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad R_a = 200\ 000\left[1{,}01^{-1} \times \frac{0{,}01}{1{,}01^{24} - 1}\right]$$

$$R_a = 200\ 000 \times 0{,}036706408 = 7\ 341{,}28$$

4.6 Renta uniforme diferida a partir de P

Renta uniforme diferida vencida

La renta uniforme diferida vencida puede obtenerse al despejarla de la fórmula (4.1a) que calcula el valor presente de una anualidad simple diferida vencida.

$$P = R\left[\frac{1}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \qquad (4.1a)$$

$$R = P\left[\frac{1}{\frac{1}{(1+i)^k}} \times \frac{1}{\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}}\right]$$

Al reagrupar términos, se tiene:

$$\boxed{R = P\left[(1+i)^k \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]} \qquad (4.3a)$$

La fórmula (4.3a) calcula la renta uniforme diferida vencida en una anualidad simple diferida vencida a partir de P, en la cual i, n y k deben ser del mismo período de R.

El factor de recuperación del capital de una anualidad simple diferida vencida FRC

En la fórmula (4.3a) los términos entre corchetes constituyen el Factor de Recuperación del Capital de la Serie uniforme de una anualidad simple diferida vencida (FRC), por lo tanto la fórmula (4.3a) se representa:

$$\boxed{R = P\left[FSC_{i;k} . FRC_{i;n}\right]} \qquad (4.3b)$$

La fórmula (4.3b) se lee: "el FRC de una anualidad simple diferida vencida a una tasa i por período durante n períodos de renta y k períodos diferidos, transforma un valor presente en una renta uniforme vencida R". El FRC diferido vencido: $FRC = (1+i)^k \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ es la renta uniforme diferida vencida que amortiza un préstamo de 1 um durante un determinado horizonte temporal.

Renta uniforme diferida anticipada

La renta uniforme diferida anticipada puede obtenerse al despejarla de la fórmula (4.2a) que calcula el valor presente de una anualidad simple diferida anticipada.

$$P = R_a\left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \quad (4.2a)$$

$$R_a = P\left[\frac{1}{\frac{1+i}{(1+i)^k}} \times \frac{1}{\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}}\right]$$

Al reagrupar términos, se tiene:

$$\boxed{R_a = P\left[\frac{(1+i)^k}{1+i} \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]} \qquad (4.4a)$$

La fórmula (4.4a) calcula la renta uniforme diferida anticipada de una anualidad simple diferida anticipada a partir de P, en la cual i, n y k deben ser del mismo período de R_a.

El factor de recuperación del capital de una anualidad simple diferida anticipada FRC

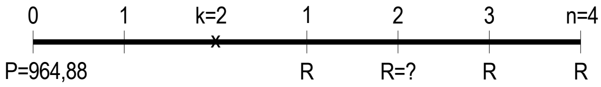
En la fórmula (4.4a) los términos entre corchetes constituyen el Factor de Recuperación del Capital de la Serie uniforme de una anualidad simple diferida anticipada (FRC), por lo tanto la fórmula (4.4a) se representa:

$$\boxed{R_a = P\left[\frac{(1+i)^k}{1+i} . FRC_{i;n}\right]} \qquad (4.4b)$$

La fórmula (4.4b) se lee: "el FRC de una anualidad simple diferida anticipada a una tasa i por período durante n períodos de renta y k períodos diferidos, transforma un valor presente en una renta uniforme anticipada R_a". El FRC diferido anticipado: $FRC = \left[\frac{(1+i)^k}{1+i} \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$ es la renta uniforme diferida anticipada que amortiza un préstamo de 1 um durante un determinado horizonte temporal.

Ejemplo 4.6
La empresa Máquinas Industriales vende compresoras a un precio al contado de 3 964,88 um. A crédito, efectúa la venta con una cuota inicial de 3 000 um y el saldo lo negocia de acuerdo con las propuestas del comprador, con una TEM de 0,05. Si un cliente solicita pagar el saldo con cuotas uniformes mensuales vencidas durante cuatro meses, las cuales se empezarán a pagar tres meses después de la cuota inicial, ¿cuál es el importe de la cuota uniforme?

Solución
Con los datos P=964,88; TEM=0,05; k=2; y n=4 se calcula la R diferida con la fórmula (4.3a).

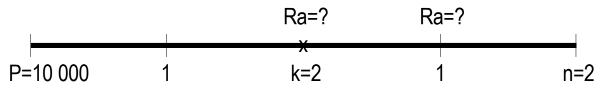


$R = P\left[(1+i)^k \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$ $\qquad R = 964{,}88\left[1{,}05^2 \times \frac{0{,}05 \times 1{,}05^4}{1{,}05^4-1}\right]$

$R = 964{,}88[1{,}1025 \times 0{,}2820118326] = 300$

Ejemplo 4.7
La compañía Phi solicita al Banco Platino un préstamo de 10 000 um que devenga una TNA de 0,2 capitalizable trimestralmente, para cancelarlo en el plazo de un año con cuotas uniformes trimestrales anticipadas. Si la gerencia de Phi consigue diferir las dos primeras cuotas sin variar el plazo del crédito, ¿a cuánto ascenderá el importe de las cuotas uniformes?

Solución
Con los datos P=10 000; TET=0,05; k=2; y n=2 se calcula renta uniforme diferida anticipada R_a con la fórmula (4.4a).



$R_a = P\left[\frac{(1+i)^k}{1+i} \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$ $\qquad R_a = 10\,000\left[\frac{1{,}05^2}{1{,}05} \times \frac{0{,}05 \times 1{,}05^2}{1{,}05^2-1}\right]$

$R_a = 10\,000[1{,}05 \times 0{,}537804878] = 5\,646{,}95$

Ejemplo 4.8
Calcule el importe de las rentas diferidas vencidas y anticipadas con los siguientes datos: P=1 000 um; k=3 meses; n=5 meses y TEM=0,02.

Solución
La renta diferida vencida se obtiene con la fórmula (4.3a).

$R = P\left[(1+i)^k \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$ $\qquad R = 1\,000\left[1{,}02^3 \times \frac{0{,}02 \times 1{,}02^5}{1{,}02^5-1}\right]$

$R = 1\,000[1{,}061208 \times 0{,}2121583941] = 225{,}14$

La renta diferida anticipada se obtiene con la fórmula (4.4a).

$R_a = P\left[\frac{(1+i)^k}{1+i} \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$ $\qquad R_a = 1\,000\left[\frac{1{,}02^3}{1{,}02} \times \frac{0{,}02 \times 1{,}02^5}{1{,}02^5-1}\right]$

$R_a = 1\,000[1{,}0404 \times 0{,}2121583941] = 220{,}73$

4.7 Cálculo de k y n en una anualidad simple diferida

El plazo de una anualidad simple diferida se compone del número de períodos diferidos k y del número de períodos de renta n, donde k+n es el número de períodos que constituyen el plazo de toda la anualidad diferida.

A partir de las fórmulas (4.1a) y (4.2a) puede calcularse k y n en una anualidad simple diferida vencida y en una anualidad simple diferida anticipada.

$$P = R\left[\frac{1}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \quad (4.1a) \qquad P = R_a\left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \quad (4.2a)$$

Después de efectuar el despeje de n y k se tienen las fórmulas (4.5), (4.6), (4.7) y (4.8) cuyos resultados se presentan a continuación.

$$n = \frac{Log\left[\frac{R}{R - Pi(1+i)^k}\right]}{Log(1+i)} \quad (4.5) \qquad n = \frac{Log\left[\frac{R_a}{R_a - Pi(1+i)^{k-1}}\right]}{Log(1+i)} \quad (4.6)$$

$$k = \frac{Log\left\{\frac{R}{Pi}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]\right\}}{Log(1+i)} \quad (4.7) \qquad k = \frac{Log\left\{\frac{R_a[(1+i)^n - 1]}{Pi(1+i)^{n-1}}\right\}}{Log(1+i)} \quad (4.8)$$

Las fórmulas (4.5) y (4.6) calculan el número de rentas en una anualidad simple diferida vencida y en una anualidad simple diferida anticipada; las fórmulas (4.7) y (4.8) calculan el número de períodos diferidos en una anualidad simple diferida vencida y en una anualidad simple diferida anticipada a partir de un valor presente P, donde i y k deber ser del mismo plazo de R y de Ra; esto significa que el plazo de n queda determinado por el período de renta, que es igual que los períodos de i y de k.

Ejemplo 4.9

Un préstamo de 9 101,74 um que devenga una TEM de 0,01 debe cancelarse en el plazo de 14 meses con cuotas uniformes mensuales de 1 000 um, este plazo incluye 4 periodos mensuales diferidos (al inicio del horizonte temporal).

a. Si las cuotas diferidas son vencidas, ¿con cuántas cuotas se cancelará el préstamo?
b. Si las cuotas diferidas son anticipadas, ¿con cuántas cuotas se cancelará el préstamo?

Solución

Con los datos R=1 000; R_a=1 000; P=9 101,74; TEM=0,01 y k=4 se calcula n.

a. Número de cuotas vencidas en una anualidad diferida vencida que se obtiene con la fórmula (4.5).

$$n = \frac{Log\left[\frac{R}{R-Pi(1+i)^k}\right]}{Log(1+i)} \qquad n = \frac{Log\left[\frac{1\,000}{1\,000 - 9\,101{,}74 \times 0{,}01 \times 1{,}01^4}\right]}{Log\ 1{,}01} = \frac{Log\ 1{,}104622157}{Log\ 1{,}01} = 10$$

b. Número de cuotas anticipadas en una anualidad diferida anticipada que se obtiene con la fórmula (4.6)

$$n = \frac{Log\left[\frac{R_a}{R_a-Pi(1+i)^{k-1}}\right]}{Log(1+i)} \qquad n = \frac{Log\left[\frac{1\,000}{1\,000 - 9\,101{,}74 \times 0{,}01 \times 1{,}01^{4-1}}\right]}{Log\ 1{,}01} = \frac{Log\ 1{,}103479104}{Log\ 1{,}01} = 9{,}895953$$

Ejemplo 4.10

En la fecha se deposita en un banco un capital de 22 528,37 um que devenga una TET de 0,03 con el objeto de retirar dentro de 4 años una renta trimestral anticipada de 5 000 um. ¿Cuántos retiros podrán realizarse?

Solución

Con los datos P=22 528,37; R_a=5 000; TET=0,03 y k=16 se calcula n con la fórmula (4.6).

$$n = \frac{Log\left[\frac{R_a}{R_a - Pi(1+i)^{k-1}}\right]}{Log(1+i)} \qquad n = \frac{Log\left[\frac{5\,000}{5\,000 - 22\,528{,}37 \times 0{,}03 \times 1{,}03^{16-1}}\right]}{Log\ 1{,}03} = \frac{Log\ 1{,}266770134}{Log\ 1{,}03} = 8$$

Ejemplo 4.11
Un préstamo de 12 447,78 um que devenga una TEB (bimestral) de 0,02 debe cancelarse con 10 cuotas diferidas uniformes bimestrales de 1 500 um, que se pagarán cada una en períodos bimestrales. Calcule el número de períodos uniformes diferidos si:

a. Las cuotas uniformes son vencidas.
b. Las cuotas uniformes son anticipadas.

Solución
Con los datos P=12 447,78; R=1 500; R_a=1 500; TEB=0,02 y n=10 se calcula k.
a. Número de períodos diferidos cuando las rentas son vencidas, obtenido con la fórmula (4.7).

$$k = \frac{Log\left\{\frac{R}{Pi}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]\right\}}{Log(1+i)} \qquad k = \frac{Log\left\{\frac{1\,500}{12\,447{,}78 \times 0{,}02}\left[1 - \frac{1}{1{,}02^{10}}\right]\right\}}{Log\ 1{,}02} = \frac{Log\ 1{,}082432169}{Log\ 1{,}02} = 4$$

b. Número de períodos diferidas cuando las rentas son anticipadas, obtenido con la fórmula (4.8).

$$k = \frac{Log\left\{\frac{R_a\left[(1+i)^n - 1\right]}{Pi(1+i)^{n-1}}\right\}}{Log(1+i)} \qquad k = \frac{Log\left\{\frac{1\,500\left[1{,}02^{10} - 1\right]}{12\,447{,}78 \times 0{,}02 \times 1{,}02^{10-1}}\right\}}{Log\ 1{,}02} = \frac{Log\ 1{,}104080813}{Log\ 1{,}02} = 5$$

4.8 Cálculo de i (TIR) en una anualidad diferida

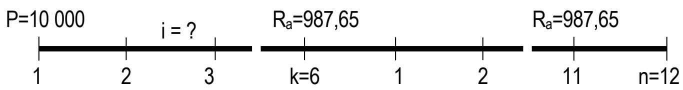
De modo similar a lo trabajado en el capítulo de anualidades vencidas y anticipadas, cuando se conocen P, R ó R_a, S y n, excepto la tasa efectiva periódica, es posible hallar ésta si se plantea su respectiva ecuación de equivalencia financiera; se calcula con el "método de tanteo" por prueba y error, a través de aproximaciones sucesivas de un par de valores que se hallen uno por encima y otro debajo del valor buscado. Con estos datos (polos), se aproxima a su verdadero valor, con la interpolación lineal.

Ejemplo 4.12
Un préstamo de 10 000 um debe amortizarse en el plazo de un año y medio; en ese plazo se tienen 6 períodos diferidos mensuales, y a partir de esa fecha se amortizará el préstamo con 12 cuotas mensuales uniformes de 987,65 um.

a. Si las cuotas uniformes son anticipadas ¿cuál es la TEA cargada en esa operación?
b. Si las cuotas uniformes son vencidas ¿cuál es la TEA cargada en esa operación?

Solución
Con los datos P=10 000; R_a=987,65; R=987,65; k=6; n=12; y con la fórmula (4.2a) se plantea una ecuación de equivalencia financiera para obtener i por tanteo.

a. Cálculo de la TIR mensual con rentas anticipadas.



$$10\ 000 = \frac{987{,}65}{(1+i)^6} + \frac{987{,}65}{(1+i)^7} + \frac{987{,}65}{(1+i)^8} + \frac{987{,}65}{(1+i)^9} + \cdots + \frac{987{,}65}{(1+i)^{16}} + \frac{987{,}65}{(1+i)^{17}}$$

$$P = R_a\left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] \qquad (4.2a)$$

$$10\ 000 = 987{,}65\left[\frac{1+i}{(1+i)^6} \times \frac{(1+i)^{12}-1}{i(1+i)^{12}}\right] \qquad (1)$$

La ecuación (1) es de grado 12 que no tiene solución algebraica, por lo tanto se asignarán valores a i de modo tal que el segundo miembro sea 10 000; para este proceso se utilizará la fórmula del FAS diferido anticipado y la fórmula de la interpolación lineal.

i	FAS	Valor presente
0,014	10,23870004	10 112,25
0,016	10,01279684	9 889,14

En el cuadro anterior se observa que la tasa i es mayor que 0,014 pero menor que 0,016; por lo tanto se interpolará entre estos dos valores para hallar su valor aproximado.

Al hacer

$x_1 =$ 0,014 $\qquad y_1 =$ 10 112,25

$x =$? $\qquad y =$ 10 000,00

$x_2 =$ 0,016 $\qquad y_2 =$ 9 889,14

Y al aplicar la fórmula (2.8) se tiene:

$$x = x_1 + \frac{y-y_1}{y_2-y_1}(x_2 - x_1)$$

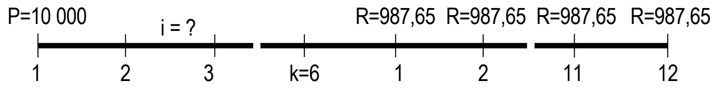
$$x = 0{,}014 + \frac{10\ 000{,}00 - 10\ 112{,}25}{9\ 889{,}14 - 10\ 112{,}25}(0{,}016 - 0{,}014)$$

$$x = 0{,}015$$

La tasa aproximada linealmente al verdadero valor de i es 0,015; para obtener la respuesta al problema planteado, debe hallarse la TEA a partir de la TEM calculada.

$TEA = (1 + TEM)^{360/30} - 1$ $\qquad$ $TEA = 1{,}015^{360/30} - 1 = 0{,}195613$

b. Cálculo de la TIR mensual con rentas vencidas.



$$10\,000 = \frac{987{,}65}{(1+i)^7} + \frac{987{,}65}{(1+i)^8} + \frac{987{,}65}{(1+i)^9} + \frac{987{,}65}{(1+i)^{10}} + \cdots + \frac{987{,}65}{(1+i)^{17}} + \frac{987{,}65}{(1+i)^{18}}$$

$$P = R\left[\frac{1}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \qquad (4.1a)$$

$$10\,000 = 987{,}65\left[\frac{1}{(1+i)^6} \times \frac{(1+i)^{12} - 1}{i(1+i)^{12}}\right]$$

Con un proceso similar al tratado en la respuesta a, se tiene una TEM de 0,013775 y una TEA de 0,17841.

4.9 Modelos de anualidades diferidas con Excel

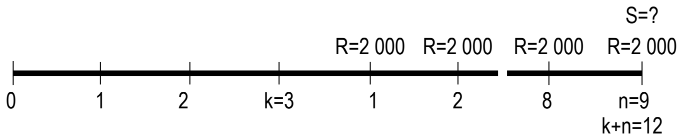
A continuación se presentan problemas de anualidades diferidas resueltos en forma tradicional y con modelos implementados en una hoja de Excel, en los cuales se utilizan las Funciones Financieras Personalizadas (FFP).

Monto de una anualidad simple diferida vencida y anticipada

1. Calcule el monto que se acumulará en el plazo de una año con cuotas uniformes mensuales diferidas vencidas de 2 000 um, la primera renta mensual se depositará dentro de cuatro meses y las siguientes del mismo importe se depositarán cada mes, hasta finalizar el plazo anual establecido. Utilice una TNA de 0,18 capitalizable mensualmente.

Solución

Con los datos R=2 000; TEM=0,015; k=3 y n=9; se calcula S con la fórmula (2.1a).



$S = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$ $\qquad$ $S = 2\,000\left[\frac{1{,}015^9-1}{0{,}015}\right]$

$S = 2\,000 \times 9{,}5593316929 = 19\,118{,}66$

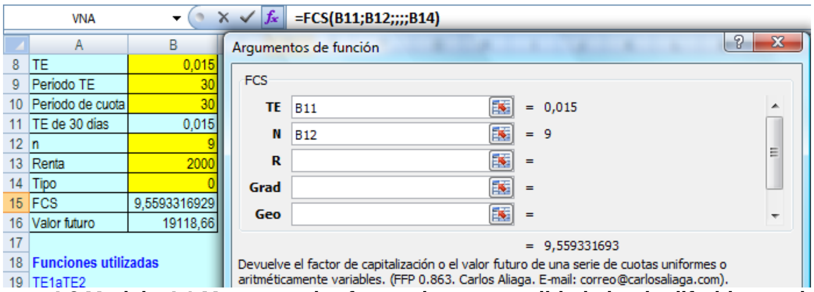
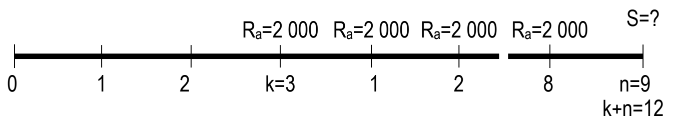


Figura 4.6 Modelo 4.1 Monto o valor futuro de una anualidad simple diferida vencida.

2. Calcule el monto que se acumulará en el plazo de una año con cuotas uniformes mensuales diferidas anticipadas de 2 000 um, la primera renta mensual se depositará dentro de cuatro meses y las siguientes del mismo importe se depositarán cada mes, hasta finalizar el plazo anual establecido. Utilice una TNA de 0,18 capitalizable mensualmente.

Solución

Con los datos R_a=2 000; TEM=0,015; k=3 y n=9; se calcula S con la fórmula (3.3a).



$S = R_a\left[(1+i) \times \frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$ $\qquad$ $S = 2\,000\left[1{,}015 \times \frac{1{,}015^9-1}{0{,}015}\right]$

$S = 2\,000 \times 9{,}7027216683 = 19\,405{,}44$

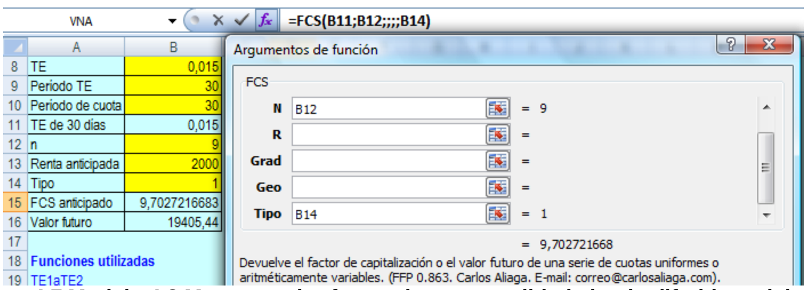


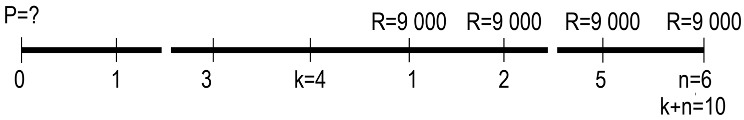
Figura 4.7 Modelo 4.2 Monto o valor futuro de una anualidad simple diferida anticipada.

Valor presente de una anualidad simple diferida vencida y anticipada

3. Un proyecto de inversión que tiene una vida útil de 5 años generará flujos de caja semestrales vencidos de 9 000 um a partir del quinto semestre. Calcule el valor presente de los flujos de caja si se tiene como tasa de costo de oportunidad una TEA de 0,1664.

Solución

Con los datos R=9 000; TES=0,08; k=4 y n=6; se calcula P con la fórmula (4.1a).



$P = R\left[\frac{1}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$ $P = 9\ 000\left[\frac{1}{1{,}08^4} \times \frac{1{,}08^6-1}{0{,}08\times 1{,}08^6}\right]$

$P = 9\ 000[0{,}735029852 \times 4{,}622879664] = 30\ 581{,}59$

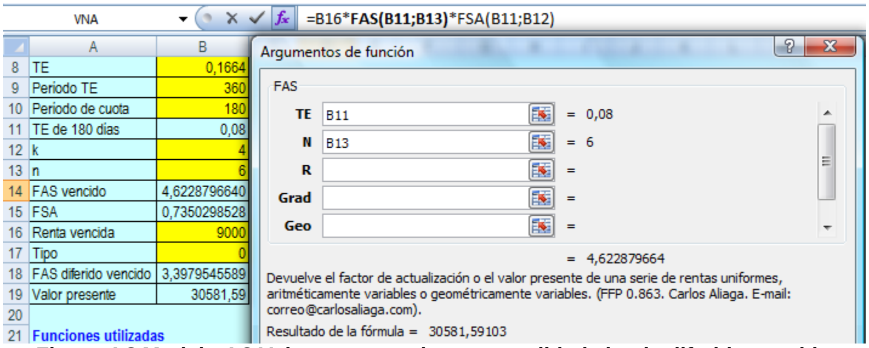
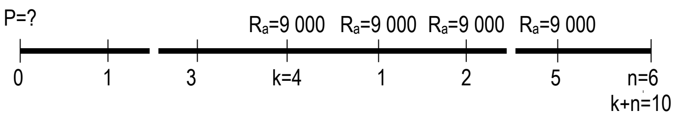


Figura 4.8 Modelo 4.3 Valor presente de una anualidad simple diferida vencida.

4. Calcule el valor presente de una anualidad cuyo horizonte temporal es 5 años, en este horizonte existen 4 períodos diferidos y 6 rentas uniformes semestrales anticipadas de 9 000 um. Utilice como tasa de descuento una TEA de 0,1664.

Solución

Con los datos R_a=9 000; TES=0,08; k=4 y n=6; se calcula P con la fórmula (4.2a).



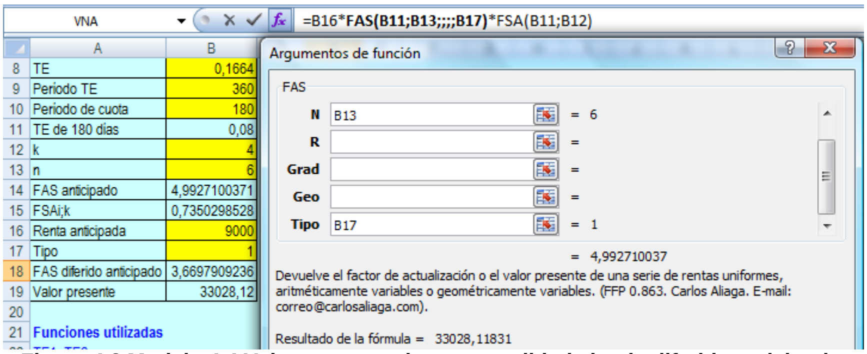


Figura 4.9 Modelo 4.4 Valor presente de una anualidad simple diferida anticipada.

$P = R_a\left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$ $P = 9\ 000\left[\frac{1+0{,}08}{1{,}08^4} \times \frac{1{,}08^6-1}{0{,}08\times 1{,}08^6}\right]$

$P = 9\ 000 \times 0{,}793832241 \times 4{,}622879664$

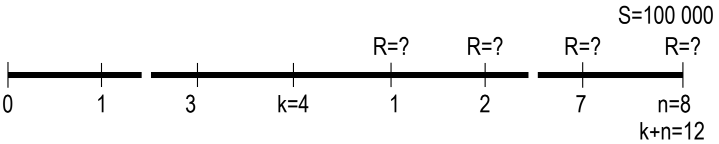
$P = 33\ 028{,}12$

Renta uniforme diferida vencida y diferida anticipada a partir de S

5. Durante el plazo de un año se requiere acumular un fondo de 100 000 um con cuotas uniformes mensuales diferidas vencidas. En este plazo anual existen 4 períodos mensuales diferidos en el cual no se depositará cuota alguna. Calcule el importe de la cuota uniforme con una TNA de 0,12 capitalizable mensualmente.

Solución

Con los datos S=100 000; TEM=0,01; k=4 y n=8; se calcula R con la fórmula (2.3a).



$R = S\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$ $\quad\quad$ $R = 100\ 000\left[\frac{0{,}01}{1{,}01^8 - 1}\right]$

$R = 100\ 000 \times 0{,}120690292 = 12\ 069{,}03$

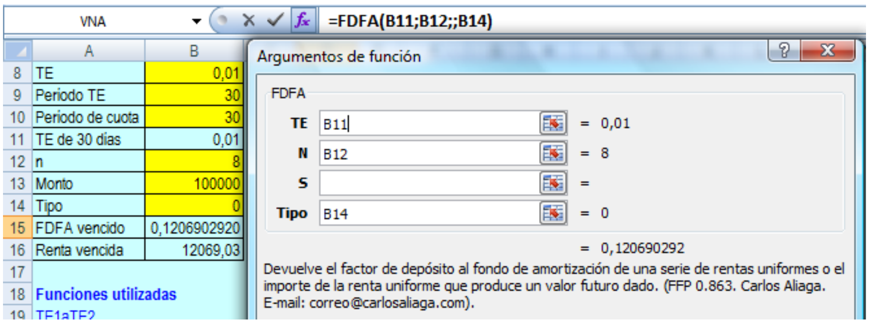
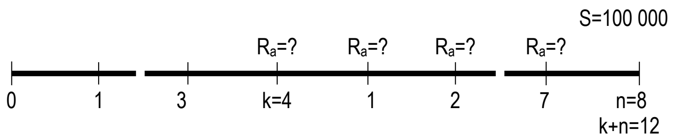


Figura 4.10 Modelo 4.5 Renta vencida a partir de un valor futuro, en una anualidad simple vencida.

6. Durante el plazo de un año se requiere acumular un fondo de 100 000 um con cuotas uniformes mensuales diferidas anticipadas. En este plazo anual existen 4 períodos mensuales diferidos en el cual no se depositará cuota alguna. Calcule el importe de la cuota uniforme diferida anticipada con una TNA de 0,12 capitalizable mensualmente.

Solución

Con los datos S=100 000; TEM=0,01; k=4 y n=8; se calcula R_a con la fórmula (3.5a).



$R_a = S\left[(1+i)^{-1} \times \frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]$ $\quad\quad$ $R_a = 100\ 000\left[1{,}01^{-1} \times \frac{0{,}01}{1{,}01^8 - 1}\right]$

$R_a = 100\ 000[0{,}11949538] = 11\ 949{,}53$

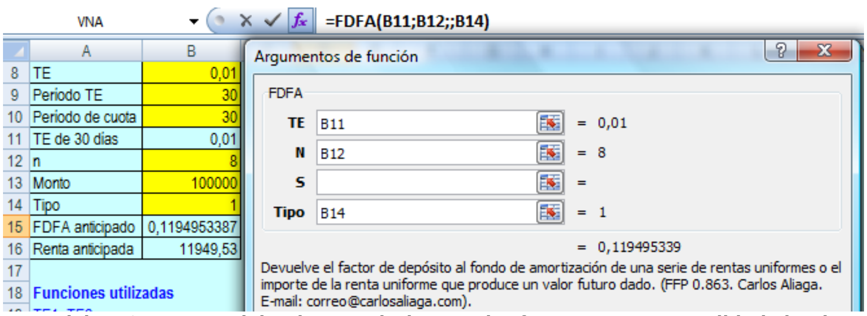


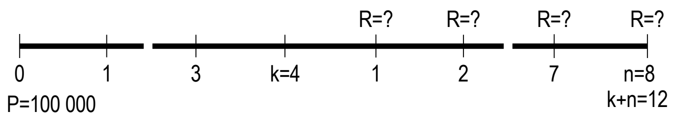
Figura 4.11 Modelo 4.6 Renta anticipada a partir de un valor futuro, en una anualidad simple anticipada.

Renta uniforme diferida vencida y diferida anticipada a partir de P

7. Un préstamo de 100 000 um, debe amortizarse en el plazo de un año con cotas uniformes vencidas diferidas. En este plazo se incluyen 4 períodos mensuales diferidos en el cual no se efectuará pago alguno. Calcule el importe de la cuota uniforme diferida vencida con una TNA de 0,12 capitalizable mensualmente.

Solución

Con los datos P=100 000; TEM=0,01; k=4 y n=8; se calcula R con la fórmula (4.3a).



$R = P\left[(1+i)^k \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$ $\qquad R = 100\ 000\left[1{,}01^4 \times \frac{0{,}01\times 1{,}01^8}{1{,}01^8-1}\right]$

$R = 100\ 000 \times 0{,}1359966842 = 13\ 599{,}68$

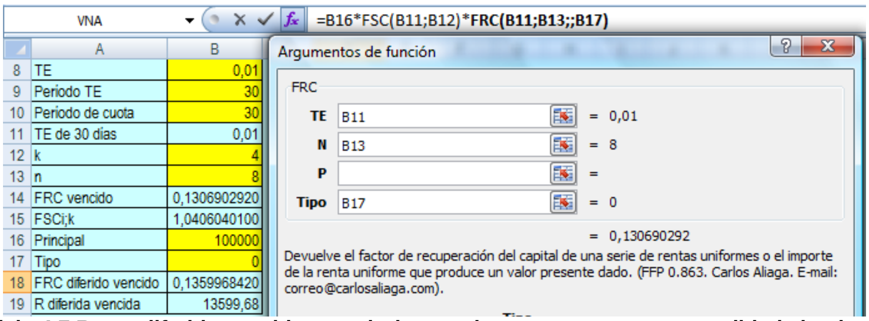
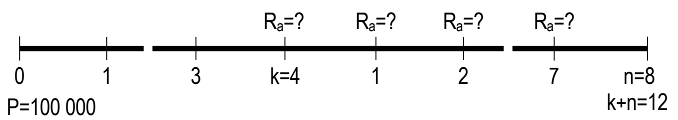


Figura 4.12 Modelo 4.7 Renta diferida vencida a partir de un valor presente, en una anualidad simple diferida vencida.

8. Un préstamo de 100 000 um, debe amortizarse en el plazo de un año con cotas uniformes anticipadas diferidas. En este plazo se incluyen 4 períodos mensuales diferidos en el cual no se efectuará pago alguno. Calcule el importe de la cuota uniforme diferida anticipada con una TNA de 0,12 capitalizable mensualmente.

Solución

Con los datos P=100 000; TEM=0,01; k=4 y n=8; se calcula R_a con la fórmula (4.4a).



$R_a = P\left[\frac{(1+i)^k}{1+i} \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$ $\qquad R_a = 100\ 000\left[\frac{1{,}01^4}{1{,}01} \times \frac{0{,}01\times 1{,}01^8}{1{,}01^8-1}\right]$

$R_a = 100\ 000[1{,}030301 \times 0{,}130690292]$

$R_a = 100\ 000 \times 0{,}1346503386 = 13\ 465{,}03$

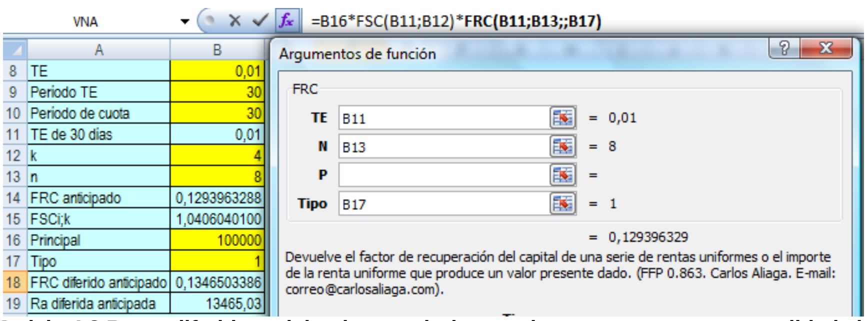


Figura 4.13 Modelo 4.8 Renta diferida anticipada a partir de un valor presente, en una anualidad simple diferida vencida.

Cálculo de k y n en una anualidad simple diferida vencida y diferida anticipada a partir de P

9. ¿Cuántos períodos diferidos mensuales debe tener un préstamo de 80 000 um que devenga una TNA de 0,24 capitalizable mensualmente, y se amortiza con 9 cuotas uniformes vencidas de 10 401,15 um, cada una de las cuales vence cada 30 días?

Solución
Con los datos R=10 401,15; P=80 000; TEM=0,02 y n=9 se calcula k con la fórmula (4.7).

$$k=\frac{Log\left\{\frac{R}{Pi}\left[1-\frac{1}{(1+i)^{n}}\right]\right\}}{Log(1+i)} \qquad k=\frac{Log\left\{\frac{10\,401{,}15}{80\,000\times 0{,}02}\left[1-\frac{1}{1{,}02^{9}}\right]\right\}}{Log\ 1{,}02}$$

$$k=\frac{Log\{6{,}50071875\times 0{,}163244734\}}{Log\ 1{,}02}=3$$

B16 — f_x =LOG((B13/(B12*B11))*(1-B15))/(LOG(1+B11))

	A	B
8	TE	0,02
9	Periodo TE	30
10	Periodo de cuota	30
11	TE de 30 días	0,02
12	Principal	80000
13	Renta vencida	10401,15
14	n	9
15	FSA	0,8367552659
16	k	3,00000

Figura 4.14 Modelo 4.9 Cálculo de k en una anualidad diferida vencida.

10. ¿Cuántos períodos diferidos mensuales debe tener un préstamo de 80 000 um que devenga una TNA de 0,24 capitalizable mensualmente, y se amortiza con 9 cuotas uniformes anticipadas de 10 401,15 um, cada una de las cuales vence cada 30 días?

Solución
Con los datos R_a=10 401,15; P=80 000; TEM=0,02 y n=9 se calcula k con la fórmula (4.8).

$$k=\frac{Log\left\{\frac{R_a[(1+i)^{n}-1]}{Pi(1+i)^{n-1}}\right\}}{Log(1+i)} \qquad k=\frac{Log\left\{\frac{10\,401{,}15[1{,}02^{9}-1]}{80\,000\times 0{,}02\times 1{,}02^{9-1}}\right\}}{Log\ 1{,}02}$$

$$k=\frac{Log\left\{\frac{2\,029{,}18707}{1\,874{,}65501}\right\}}{Log(1+0{,}02)}=4$$

B17 — f_x =LOG(B15/B16)/LOG(1+B11)

	A	B
8	TE	0,02
9	Periodo TE	30
10	Periodo de cuota	30
11	TE de 30 días	0,02
12	Principal	80000
13	Renta anticipada	10401,15
14	n	9
15	$R_a[(1+i)^n-1)]$	2029,19
16	$Pi(1+i)^{n-1}$	1874,66
17	k	4

Figura 4.15 Modelo 4.10 Cálculo de k en una anualidad diferida anticipada.

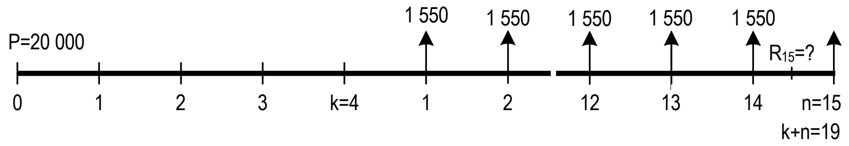
11. Cuántos pagos uniformes mensuales vencidos de 1 550 um deben realizarse para cancelar un préstamo de 20 000 um que devenga una TEM de 0,01. Este préstamo tiene 4 períodos mensuales diferidos en los cuales no se realiza pago alguno. Si el número de pagos fuese un número no entero:

   a. En qué fecha debe cancelarse la última cuota (no entera), y cuál es el importe por cancelar en esa fecha.
   b. Redondee n al entero inmediato superior y calcule el importe de la última cuota mensual.
   c. Redondee n al entero inmediato inferior y calcule el importe de la última cuota mensual.

Solución
Con los datos P=20 000; R=1 550; TEM=0,01 y k=4 se calcula n con la fórmula (4.5).

$$n = \frac{Log\left[\frac{R}{R-Pi(1+i)^k}\right]}{Log(1+i)} \qquad n = \frac{Log\left[\frac{1\,550}{1\,550-20\,000\times 0{,}01\times 1{,}01^4}\right]}{Log\ 1{,}01}$$

$$n = \frac{Log\left[\frac{1\,550}{1\,341{,}879198}\right]}{Log\ 1{,}01} = 14{,}49036368$$



a. Fecha de cancelación e importe de la última cuota vencida no entera en el día 554,71.

Día de cancelación de la cuota 15=(4+14,49036368)×30=554,7109105

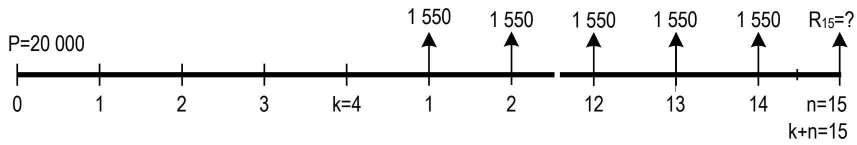
$$20\,000 = \frac{1\,550}{1{,}01^5} + \frac{1\,550}{1{,}01^6} + \cdots + \frac{1\,550}{1{,}01^{17}} + \frac{1\,550}{1{,}01^{18}} + \frac{R_{15}}{1{,}01^{18{,}49036368}}$$

$$20\,000 = 1\,550\left[\frac{1{,}01^{14}-1}{0{,}01\times 1{,}01^{14}} \times \frac{1}{1{,}01^4}\right] + \frac{R_{15}}{1{,}01^{18{,}49036368}}$$

$$20\,000 = 19\,369{,}26969 + \frac{R_{15}}{1{,}01^{18{,}49036368}}$$

$$R_{15} = 758{,}14$$

b. Valor de n redondeado al inmediato superior n=15 el día 570.



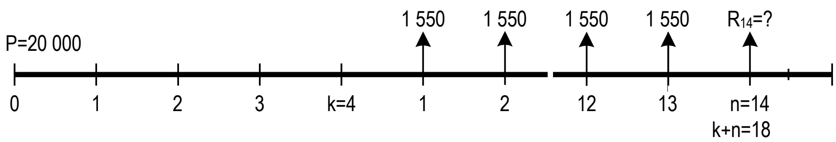
$$20\,000 = \frac{1\,550}{1{,}01^5} + \frac{1\,550}{1{,}01^6} + \cdots + \frac{1\,550}{1{,}01^{17}} + \frac{1\,550}{1{,}01^{18}} + \frac{R_{15}}{1{,}01^{19}}$$

$$20\,000 = 1\,550\left[\frac{1{,}01^{14}-1}{0{,}01\times 1{,}01^{14}} \times \frac{1}{1{,}01^4}\right] + \frac{R_{15}}{1{,}01^{19}}$$

$$20\,000 = 19\,369{,}26969 + \frac{R_{15}}{1{,}01^{19}}$$

$$R_{15} = 761{,}99$$

c. Valor de n redondeado al inmediato inferior n=14 el día 540.



$$20\,000 = \frac{1\,550}{1{,}01^5} + \frac{1\,550}{1{,}01^6} + \cdots + \frac{1\,550}{1{,}01^{16}} + \frac{1\,550}{1{,}01^{17}} + \frac{R_{14}}{1{,}01^{18}}$$

$$20\,000 = 1\,550\left[\frac{1{,}01^{13}-1}{0{,}01\times 1{,}01^{13}} \times \frac{1}{1{,}01^4}\right] + \frac{R_{14}}{1{,}01^{18}}$$

$$20\,000 = 18\,073{,}44286 + \frac{R_{14}}{1{,}01^{18}}$$

$$R_{14} = 2\,304{,}45$$

B17 f_x =LOG(B13/B16)/LOG(1+B11)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
8	TE	0,01																
9	Periodo TE	30																
10	Periodo de cuota	30																
11	TE de 30 días	0,01																
12	Principal	20000																
13	Renta vencida	1550																
14	Tipo	0																
15	k	4																
16	$R\text{-}Pi(1+i)^k$	1341,8792																
17	n vencido	14,490363683																
18																		
19	Nº cuotas	14,490363683		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	14,4904
20	FSAi;k	0,9609803445	R	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	758,14
21	n	14	FSA	0,99010	0,98030	0,97059	0,96098	0,95147	0,94205	0,93272	0,92348	0,91434	0,90529	0,89632	0,88745	0,87866	0,86996	0,86573
22	VA de 14 cuotas diferidas	19369,27		1534,65	1519,46	1504,41	1489,52	1474,77	1460,17	1445,71	1431,40	1417,23	1403,19	1389,30	1375,55	1361,93	1348,44	656,34
23	a. Importe de cuota 14,49	758,14	VA	20000,00														
24																		
25	Cuota	15		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
26	b. Importe de cuota 15	761,99	R	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	761,99
27			FSA	0,99010	0,98030	0,97059	0,96098	0,95147	0,94205	0,93272	0,92348	0,91434	0,90529	0,89632	0,88745	0,87866	0,86996	0,86135
28				1534,65	1519,46	1504,41	1489,52	1474,77	1460,17	1445,71	1431,40	1417,23	1403,19	1389,30	1375,55	1361,93	1348,44	656,34
29			VA	20000,00														
30																		
31	Cuota	13		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
32	n	14	R	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	2304,45	
33	VA de 13 cuotas diferidas	18073,44	FSA	0,99010	0,98030	0,97059	0,96098	0,95147	0,94205	0,93272	0,92348	0,91434	0,90529	0,89632	0,88745	0,87866	0,86996	
34	c. Importe de cuota 14	2304,45		1534,65	1519,46	1504,41	1489,52	1474,77	1460,17	1445,71	1431,40	1417,23	1403,19	1389,30	1375,55	1361,93	2004,78	
35			VA	20000,00														

Figura 4.16 Modelo 4.11 Cálculo de n en una anualidad simple diferida vencida y sus diferentes valores cuando n es no entero.

12. Cuántos pagos uniformes mensuales anticipados de 1 550 um deben realizarse para cancelar un préstamo de 20 000 um que devenga una TEM de 0,01. Este préstamo tiene 4 períodos mensuales diferidos en los cuales no se realiza pago alguno. Si el número de pagos fuese un número no entero:

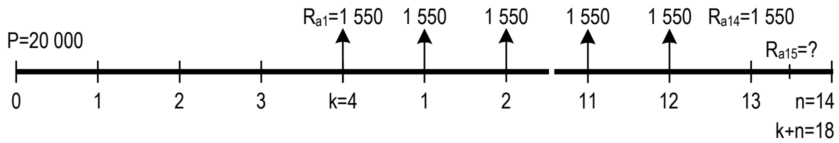
    a. En qué fecha debe cancelarse la última cuota (no entera), y cuál es el importe por cancelar en esa fecha.
    b. Redondee n al entero inmediato superior y calcule el importe de la última cuota mensual.
    c. Redondee n al entero inmediato inferior y calcule el importe de la última cuota mensual.

Solución

Con los datos P=20 000; R_a=1 550; TEM=0,01 y k=4 se calcula n con la fórmula (4.6).

$$n = \frac{Log\left[\frac{R_a}{R_a - Pi(1+i)^{k-1}}\right]}{Log(1+i)} \qquad n = \frac{Log\left[\frac{1\,550}{1\,550 - 20\,000 \times 0{,}01 \times 1{,}01^{4-1}}\right]}{Log\ 1{,}01}$$

$$n = \frac{Log\left[\frac{1\,550}{1\,343{,}9398}\right]}{Log\ 1{,}01} = 14{,}33615461$$



a. Fecha de cancelación e importe de la última cuota anticipada no entera en el día 520,08.

Día de cancelación de la cuota 15=(4+13,33615461)×30=520,0846383

$$20\,000 = \frac{1\,550}{1{,}01^4} + \frac{1\,550}{1{,}01^5} + \cdots + \frac{1\,550}{1{,}01^{16}} + \frac{1\,550}{1{,}01^{17}} + \frac{R_{a15}}{1{,}01^{17{,}33615461}}$$

$$P = R_a\left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] + \frac{R_{a15}}{(1+i)^{17{,}33615461}}$$

$$20\,000 = 1\,550\left[\frac{1+0{,}01}{1{,}01^4} \times \frac{1{,}01^{14} - 1}{0{,}01 \times 1{,}01^{14}}\right] + \frac{R_{a15}}{1{,}01^{17{,}33615461}}$$

$$20\,000 = 19\,562{,}96239 + \frac{R_{a15}}{1{,}01^{17{,}33615461}}$$

$$R_{a15} = 519{,}32$$

b. Valor de n redondeado al inmediato superior n=15 el día 540.

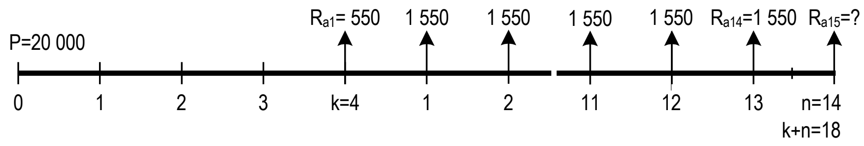
$$20\,000 = \frac{1\,550}{1{,}01^4} + \frac{1\,550}{1{,}01^5} + \cdots + \frac{1\,550}{1{,}01^{16}} + \frac{1\,550}{1{,}01^{17}} + \frac{R_{a15}}{1{,}01^{18}}$$

$$P = R_a\left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] + \frac{R_{a15}}{(1+i)^{18}}$$

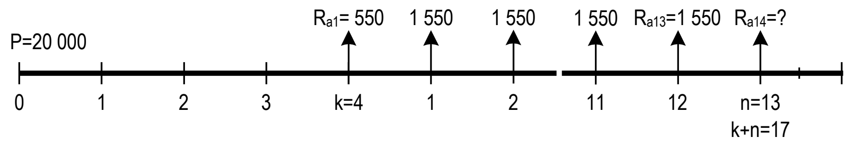
$$20\,000 = 1\,550\left[\frac{1+0{,}01}{1{,}01^4} \times \frac{1{,}01^{14}-1}{0{,}01\times1{,}01^{14}}\right] + \frac{R_{a15}}{1{,}01^{18}}$$

$$20\,000 = 19\,562{,}96239 + \frac{R_{a15}}{1{,}01^{18}}$$

$$R_{a15} = 522{,}76$$



c. Valor de n redondeado al inmediato inferior n=14 el día 510.



$$20\,000 = \frac{1\,550}{1{,}01^4} + \frac{1\,550}{1{,}01^5} + \cdots + \frac{1\,550}{1{,}01^{16}} + \frac{1\,550}{1{,}01^{17}} + \frac{R_{a14}}{1{,}01^{17}}$$

$$P = R_a\left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] + \frac{R_{a14}}{(1+i)^{17}}$$

$$20\,000 = 1\,550\left[\frac{1+0{,}01}{1{,}01^4} \times \frac{1{,}01^{13}-1}{0{,}01\times1{,}01^{13}}\right] + \frac{R_{a14}}{1{,}01^{17}}$$

$$20\,000 = 18\,254{,}17729 + \frac{R_{a14}}{1{,}01^{17}}$$

$$R_{a14} = 2\,067{,}59$$

B22 =FAS(B11;B21;B13;;;B14)*FSA(B11;B15)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
8	TE	0,01																
9	Periodo TE	30																
10	Periodo de cuota	30																
11	TE de 30 días	0,01																
12	Principal	20000																
13	Renta anticipada	1550																
14	Tipo	1																
15	k	4																
16	R_a-Pi(1+i)$^{k-1}$	1343,9398																
17	n anticipado	14,336154607																
18																		
19	Nº cuotas anticipadas	14,336154607		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	13,3362
20	FSAi;k	0,9609803445	Ra	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	519,32
21	n	14	FSA	1,00000	0,99010	0,98030	0,97059	0,96098	0,95147	0,94205	0,93272	0,92348	0,91434	0,90529	0,89632	0,88745	0,87866	0,87573
22	VA de 14 cuotas diferidas	19562,96		1550,00	1534,65	1519,46	1504,41	1489,52	1474,77	1460,17	1445,71	1431,40	1417,23	1403,19	1389,30	1375,55	1361,93	454,78
23	a. Importe de cuota 14,34	519,32	VA	20000,00														
24																		
25	Cuota	15		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
26	b. Importe de cuota 15	522,76	Ra	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	522,76
27			FSA	1,00000	0,99010	0,98030	0,97059	0,96098	0,95147	0,94205	0,93272	0,92348	0,91434	0,90529	0,89632	0,88745	0,87866	0,86996
28				1550,00	1534,65	1519,46	1504,41	1489,52	1474,77	1460,17	1445,71	1431,40	1417,23	1403,19	1389,30	1375,55	1361,93	454,78
29			VA	20000,00														
30																		
31	Cuota	14		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
32	n	13	Ra	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	1550	2067,59	
33	VA de 14 cuotas diferidas	18254,18	FSA	1,00000	0,99010	0,98030	0,97059	0,96098	0,95147	0,94205	0,93272	0,92348	0,91434	0,90529	0,89632	0,88745	0,87866	
34	c. Importe de Ra 14	2067,59		1550,00	1534,65	1519,46	1504,41	1489,52	1474,77	1460,17	1445,71	1431,40	1417,23	1403,19	1389,30	1375,55	1816,71	
35			VA	20000,00														

Figura 4.17 Modelo 4.12 Cálculo de n en una anualidad simple diferida anticipada y sus diferentes valores cuando n es no entero.

Cálculo de i (TIR) en una anualidad simple diferida vencida y diferida anticipada

13. Calcule la TEA que se aplicó a un préstamo de 4 000 000 um que debe cancelarse en el plazo de un año con cuotas uniformes vencidas mensuales; de 463 296,49 um, este plazo considera dos períodos mensuales diferidos, en los cuales no se efectuará pago alguno.

Solución
Con los datos P=4 000 000; R=463 296,49; k=2; n=10; se plantea una ecuación de equivalencia financiera para obtener i por "tanteo".

$$4\ 000\ 000 = \frac{463\ 296{,}49}{(1+i)^3} + \frac{463\ 296{,}49}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{463\ 296{,}49}{(1+i)^{11}} + \frac{463\ 296{,}49}{(1+i)^{12}} \qquad (1)$$

$$4\ 000\ 000 = 463\ 296{,}49\left[\frac{1}{(1+i)^2} \times \frac{(1+i)^{10}-1}{i(1+i)^{10}}\right] \qquad (2)$$

i	FAS diferido vencido	Valor presente
0,019	8,696171025	4 028 905,512
0,021	8,571965449	3 971 361,505

En el cuadro anterior se observa que la tasa i es mayor que 0,019 pero menor que 0,021; por lo tanto se interpolará entre estos dos valores para hallar su valor aproximado.

Al hacer:

$$\begin{array}{llll} x_1 = & 0{,}019 & y_1 = & 4\ 028\ 905{,}51 \\ x = & ? & y = & 4\ 000\ 000{,}00 \\ x_2 = & 0{,}021 & y_2 = & 3\ 971\ 361{,}51 \end{array}$$

Y al aplicar la fórmula (2.8) se tiene:

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}(x_2 - x_1)$$

$$x = 0{,}019 + \frac{4\ 000\ 000 - 4\ 028\ 905{,}51}{3\ 971\ 361{,}51 - 4\ 028\ 905{,}51}(0{,}021 - 0{,}019)$$

$$x = 0{,}02$$

La tasa aproximada linealmente al verdadero valor de i es 0,02. Para obtener la respuesta al problema planteado, debe hallarse la TEA a partir de la TEM calculada.

$$TEA = (1 + TEM)^{360/30} - 1 \qquad\qquad TEA = (1 + 0{,}02)^{360/30} - 1 = 0{,}26824$$

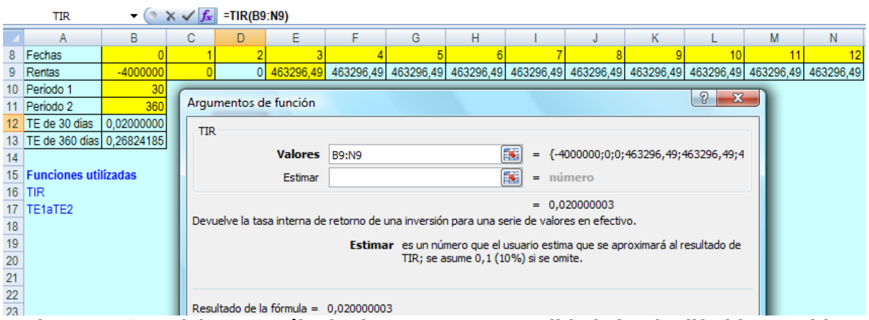


Figura 4.18 Modelo 4.13 Cálculo de TIR en una anualidad simple diferida vencida.

14. Un préstamo de 100 000 um que tiene tres periodos diferidos mensuales, se cancela con siete cuotas uniformes mensuales anticipadas de 16 075,42 um. Calcule la TEA aplicada al préstamo.

Solución
Con los datos P=100 000; R_a=16 075,42; k=3; n=7; se plantea una ecuación de equivalencia financiera para obtener i por "tanteo".

$$100\,000 = \frac{16\,075{,}42}{(1+i)^3} + \frac{16\,075{,}42}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{16\,075{,}42}{(1+i)^8} + \frac{16\,075{,}42}{(1+i)^9} \qquad (1)$$

$$P = R_a\left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] \qquad (2)$$

$$100\,000 = 16\,075{,}42\left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^7-1}{i(1+i)^7}\right] \qquad (3)$$

i	FAS diferido anticipado	Valor presente
0,019	6,256919904	100 582,62
0,021	6,184700533	99 421,66

En el cuadro anterior se observa que la tasa i es mayor que 0,019 pero menor que 0,021; por lo tanto se interpolará entre estos dos valores para hallar su valor aproximado.

Al hacer:

$$x_1 = 0{,}019 \qquad y_1 = 100\,582{,}62$$
$$x = ? \qquad y = 100\,000{,}00$$
$$x_2 = 0{,}021 \qquad y_2 = 99\,421{,}66$$

Y al aplicar la fórmula (2.8) se tiene:

$$x = x_1 + \frac{y-y_1}{y_2-y_1}(x_2-x_1)$$

$$x = 0{,}019 + \frac{100\,000{,}00-100\,582{,}62}{99\,421{,}66-100\,582{,}62}(0{,}021-0{,}019)$$

$$x = 0{,}02$$

La tasa aproximada linealmente al verdadero valor de i es 0,02. Para obtener la respuesta al problema planteado, debe hallarse la TEA a partir de la TEM calculada.

$$TE = (1+TEM)^{360/30} - 1 \qquad TEA = (1+0{,}02)^{360/30} - 1 = 0{,}26824$$

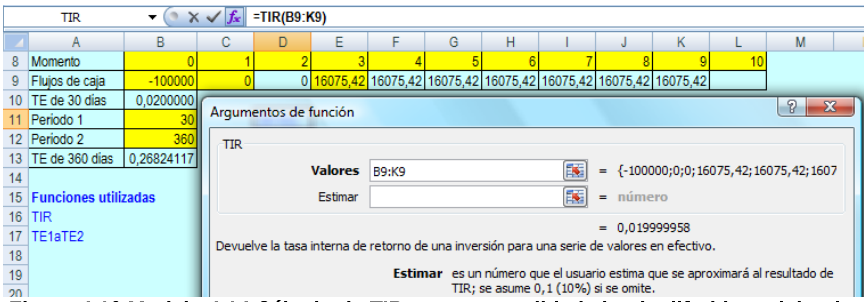


Figura 4.19 Modelo 4.14 Cálculo de TIR en una anualidad simple diferida anticipada.

4.10 Listado de fórmulas

Fórmula	Obtiene
$S = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$	(2.1a) Valor futuro de una anualidad simple diferida vencida.
$S = R_a\left[(1+i) \times \frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$	(3.3a) Valor futuro de una anualidad simple diferida anticipada.
$P = R\left[\frac{1}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$	(4.1a) Valor presente de una anualidad simple diferida vencida.
$P = R\left[FSA_{i;k}.FAS_{i;n}\right]$	(4.1b) Valor presente de una anualidad simple diferida vencida, con el FAS diferido vencido:
$P = R_a\left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$	(4.2a) Valor presente de una anualidad simple diferida anticipada.
$P = R_a\left[\frac{1+i}{(1+i)^k} \times FAS_{i;n}\right]$	(4.2b) Valor presente de una anualidad simple diferida anticipada, con el FAS diferido anticipado.
$R = S\left[\frac{i}{(1+i)^n-1}\right]$	(2.3a) Renta uniforme diferida vencida a partir de S.
$R_a = S\left[(1+i)^{-1} \times \frac{i}{(1+i)^n-1}\right]$	(3.5a) Renta uniforme diferida anticipada a partir de S.
$R = P\left[(1+i)^k \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$	(4.3a) Renta uniforme diferida vencida a partir de P.
$R = P\left[FSC_{i;k}.FRC_{i;n}\right]$	(4.3b) Renta uniforme diferida vencida a partir de P, con el FRC diferido vencido.
$R_a = P\left[\frac{(1+i)^k}{1+i} \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$	(4.4a) Renta uniforme diferida anticipada a partir de P, con el FRC diferido anticipado.
$R_a = P\left[\frac{(1+i)^k}{1+i}.FRC_{i;n}\right]$	(4.4b) Renta uniforme diferida anticipada a partir de P.
$n = \frac{Log\left[\frac{R}{R-Pi(1+i)^k}\right]}{Log(1+i)}$	(4.5) Número de períodos de renta en una anualidad simple diferida vencida.
$n = \frac{Log\left[\frac{R_a}{R_a-Pi(1+i)^{k-1}}\right]}{Log(1+i)}$	(4.6) Número de períodos de renta en una anualidad simple diferida anticipada.
$k = \frac{Log\left\{\frac{R}{Pi}\left[1-\frac{1}{(1+i)^n}\right]\right\}}{Log(1+i)}$	(4.7) Número de períodos diferidos en una anualidad simple diferida vencida.
$k = \frac{Log\left\{\frac{R_a\left[(1+i)^n-1\right]}{Pi(1+i)^{n-1}}\right\}}{Log(1+i)}$	(4.8) Número de períodos diferidos en una anualidad simple diferida anticipada.

Preguntas de autoevaluación

1. ¿Qué es una anualidad simple diferida? Ponga cinco ejemplos de anualidades diferidas.

2. ¿Qué es un plazo diferido?

3. Escriba las fórmulas del monto de una anualidad simple diferida vencida y del monto de una anualidad simple diferida anticipada.

4. ¿Qué es una fecha focal?

5. ¿Qué es el FAS diferido vencido? Escriba su fórmula.

6. ¿Qué es el FAS diferido anticipado? Escriba su fórmula.

7. Escriba las fórmulas de las rentas uniformes diferidas vencidas y de las rentas uniformes diferidas anticipadas, a partir de un valor futuro.

8. Demuestre las fórmulas de la renta uniforme diferida vencida y de la renta uniforme diferida anticipada, a partir de un valor presente.

9. ¿Qué es el FRC diferido vencido? Escriba su fórmula.

10. ¿Qué es el FRC diferido anticipado? Escriba su fórmula.

11. ¿Qué alternativas pueden adoptarse para interpretar n cuando su valor es un número no entero, en una anualidad simple diferida vencida y anticipada? Comente.

12. Despeje la variable k de las fórmulas 4.1a y 4.1b que corresponden a los valores presentes de una anualidad simple diferida vencida, y diferida anticipada respectivamente.

13. Con las variables: k períodos diferidos, n períodos de renta, R rentas vencidas, R_a rentas anticipadas e i tasa de interés; las cuales son del mismo período y con la fórmula de la suma de una progresión geométrica, deduzca la fórmula del valor presente de:

    a. Una anualidad diferida simple vencida.

    b. Una anualidad diferida simple anticipada.

14. Con los datos $P=100$ um, $i=0{,}03$, $k=4$ y $n=6$, calcule los importe de R, S y P. Utilice los factores financieros con rentas diferidas vencidas. Asuma que las variables i, k y n tienen el mismo período.

15. Con los datos $P=100$ um, $i=0{,}03$, $k=4$ y $n=6$, calcule los importe de R_a, S y P. Utilice los factores financieros con rentas diferidas anticipadas. Asuma que las variables i, k y n tienen el mismo período.

16. Con una TEM de 0,03, 4 períodos mensuales diferidos y 6 imposiciones mensuales de 1,00 um cada una, calcule los importes del valor futuro y valor presente de la anualidad simple diferida.

Problemas propuestos

Factores financieros diferidos

1. Con una TEM de 0,01; un horizonte temporal de 10 meses que incluyen 3 períodos diferidos mensuales y rentas de 1 um, calcule los siguientes factores financieros diferidos vencidos y anticipados: FRC, FAS, FCS y FDFA.

2. Con una TEA de 0,19561817146 obtenga los valores de los factores financieros diferidos mensuales vencidos y anticipados: FRC, FAS, FCS y FDFA. El horizonte temporal se inicia el 8 de marzo y termina el 4 de setiembre del mismo año; en este plazo los dos primeros períodos mensuales (30 días), son períodos diferidos.

3. Con una TNA de 0,24 capitalizable mensualmente, calcule los factores financieros diferidos vencidos y diferidos anticipados trimestrales: FRC, FAS, FCS y FDFA. Considere 2 períodos diferidos trimestrales y 5 rentas uniformes trimestrales diferidas de 1 um.

Monto de una anualidad simple diferida vencida

4. En la fecha se acordó acumular un monto durante el plazo de ocho meses con cuotas uniformes vencidas que incluyen un plazo diferido de dos meses, mediante depósitos en un banco de seis cuotas uniformes mensuales de 500 um cada una, que devengarán una TEM de 0,03. La primera de las seis cuotas uniformes se depositará dentro de tres meses y cada depósito posterior tendrá una periodicidad mensual.
   a. Calcule el monto de esa anualidad simple diferida vencida, y el interés devengado en esa operación.
   b. Prepare la tabla de acumulación del monto.

5. En el plazo de dos años que incluye cuatro meses diferidos debe acumularse un fondo con cuotas uniformes mensuales vencidas de 2 000 um. Con una TEA de 0,100338693716 calcule el monto y el interés total de ese fondo.

Monto de una anualidad simple diferida anticipada

6. Una anualidad simple tiene tres períodos mensuales diferidos y siete rentas uniformes anticipadas mensuales de 4 000 um. Calcule el monto y el interés total de esa anualidad con una TNA de 0,12 capitalizable trimestralmente. Formule la tabla de acumulación del monto.

7. Calcule el monto de una anualidad simple diferida anticipada trimestral, que tiene 3 períodos trimestrales diferidos y 8 rentas trimestrales anticipadas de 2 000 um; la anualidad devenga una TET de 0,03. ¿Cuánto es el interés total del monto?

Valor presente de una anualidad simple diferida vencida

8. Calcule el valor presente de una anualidad con un horizonte temporal de 24 trimestres, de los cuales los 4 primeros trimestres son diferidos. El importe de cada renta uniforme trimestral vencida es 2 500 um, y la TEA aplicada es 0,15. ¿Cuánto es el valor presente de la primera renta de la anualidad diferida?

9. El proceso de fabricación e instalación de una máquina tendrá una duración de 5 meses, período en el cual no habrá gastos ni ingresos de operación. A partir del fin del sexto mes producirá una ganancia neta mensual de 500 um durante 24 meses consecutivos, ¿cuánto es el valor presente de dichos flujos, si se considera una TEM de 0,015 durante los primeros 5 meses y una TEM de 0,02 para los meses restantes? ¿Cuánto es el valor presente de la primera renta de la anualidad diferida vencida?

10. El Hotel Maranga Inn estará terminado dentro de un año, fecha a partir de la cual se proyecta por 10 años tener ingresos netos mensuales de 20 000 um. Calcule el valor presente de esos flujos con una TEA de 0,2. ¿Cuánto es el valor presente de la primera renta de la anualidad diferida vencida?

11. Calcule el importe con el que hoy debe abrirse una cuenta que devenga una TEA de 0,08 que permita retirar nueve rentas mensuales vencidas consecutivas de 500 um cada una, la primera de las cuales se retirará 90 días después de abrirse la cuenta. ¿Cuánto es el valor presente de la segunda renta de la anualidad diferida vencida?

12. ¿Cuánto es el importe de un préstamo que debe solicitarse a un banco hoy, para pagar 1 000 um durante ocho trimestres? El primer pago se realizará dentro de medio año; el préstamo devenga una TEM de 0,01. ¿Cuánto es el valor presente de la segunda renta de la anualidad diferida vencida?

13. Calcule el precio de contado equivalente de una maquina que se vende al crédito con una cuota inicial de 30% y el saldo amortizable en 8 cuotas uniformes mensuales vencidas de 800 um cada una, cuyo primer vencimiento será dentro de 3 meses. La tasa de costo de oportunidad del capital es una TEM de 0,015. ¿Cuánto es el importe de la cuota inicial?

Valor presente de una anualidad simple diferida anticipada

14. Calcule el valor presente de una anualidad que tiene 5 periodos mensuales diferidos y 10 rentas mensuales anticipadas de 500 um cada una. La tasa vigente durante el plazo diferido es una TEM de 0,015 y durante el plazo de pago de las rentas anticipadas es una TEM de 0,02. ¿Cuánto es el valor presente de la primera cuota anticipada?

15. Para cubrir las pensiones que demandarán la instrucción superior de su hijo, un padre de familia decide colocar hoy un determinado capital con el objeto que dentro de tres años, al comienzo de cada mes durante cinco años, le permita retirar 200 um. Si la TEA que devenga esa colocación es 0,1; ¿cuánto es el importe del capital por colocar hoy? ¿Cuánto es el valor presente del segundo retiro de esta anualidad diferida anticipada?

16. En una transacción comercial, un cliente conviene con su acreedor cancelar su deuda con un pago inicial de 2 000 um y 1 000 um al comienzo de cada mes empezando a inicios del sexto mes y durante 10 meses consecutivos. Si el cliente decide efectuar todo el pago al contado, ¿qué importe debería cancelar si el acreedor ofrece aplicar como tasa de descuento una TEM de 0,03?

17. Calcule el valor presente de una anualidad que tiene 4 trimestres diferidos y 12 rentas trimestrales uniformes anticipadas, utilice una TEM de 0,03. La renta diferida anticipada debe ser equivalente a los 2/3 de la renta vencida que se obtenga de un valor presente de 8 000 um, amortizable con 8 rentas uniformes semestrales vencidas con una TEA de 0,24.

Renta uniforme diferida vencida a partir de S

18. Al término de un horizonte temporal de 10 trimestres de los cuales 4 son trimestres diferidos, se requiere acumular un monto de 20 000 um con cuotas uniformes trimestrales vencidas. Estas cuotas uniformes serán depositadas en un banco que remunera a los ahorros con una TEA de 0,12; calcule el importe de la cuota uniforme. ¿Cuánto es el interés total generado por el monto acumulado?

19. En un período de 8 meses que incluye 2 meses diferidos, se requiere acumular un monto de 50 000 um, con rentas uniformes mensuales vencidas. Calcule el importe de esas rentas que depositadas en un banco devengan una TET de 0,02. ¿Cuánto es el interés total generado por el monto acumulado? Prepare la tabla de acumulación del monto.

Renta uniforme diferida anticipada a partir de S

20. Al final de un horizonte temporal de 12 semestres de los cuales 4 son trimestres diferidos, se requiere acumular un monto de 10 000 um con cuotas uniformes trimestrales anticipadas. Estas cuotas uniformes serán depositadas en un banco que remunera a los ahorros con una TEA de 0,08; calcule el importe de la cuota uniforme anticipada. ¿Cuánto es el interés total generado por el monto acumulado? Prepare la tabla de acumulación del monto.

21. Al final de un plazo de dos años que incluye 4 períodos mensuales diferidos, se requiere acumular un monto de 40 000 um. Calcule el importe de la renta uniforme diferida mensual anticipada que devenga una TEA de 0,08 y permite acumular dicho monto al final del plazo establecido. ¿Cuánto es el interés total generado por el monto acumulado?

Renta uniforme diferida vencida a partir de P

22. Calcule el importe de la cuota uniforme trimestral diferida vencida por pagar en un financiamiento de 15 000 um otorgado por una entidad financiera a una TEA de 0,2. El préstamo debe amortizarse en 4 períodos trimestrales, de los cuales los dos primeros son diferidos. ¿cuánto es el valor del FRC diferido vencido? ¿Cuánto es el interés de la primera cuota uniforme trimestral diferida vencida?

23. Un préstamo de 50 000 um se financia en el plazo de 21 meses con cuotas uniformes vencidas bimestrales; este plazo incluye 5 meses diferidos en los cuales no se efectúa pago alguno. Calcule el importe de la renta uniforme diferida bimestral si el préstamo devenga una TEA de 0,14. ¿Cuánto es el interés de la primera cuota uniforme bimestral diferida vencida?

24. En el plazo de 19 meses se amortiza un préstamo de 30 000 um que devenga una TET de 0,03 con cuotas uniformes trimestrales diferidas vencidas. Calcule el importe de la cuota uniforme trimestral si el plazo del préstamo incluye 4 períodos diferidos mensuales. ¿Cuánto es el interés de la primera cuota uniforme trimestral diferida vencida?

Renta uniforme diferida anticipada a partir de P

25. Un préstamo de 10 000 um que devenga una TEA de 0,15 tiene tres períodos mensuales diferidos, y se cancela con ocho cuotas uniformes anticipadas cada una de las cuales vencen cada 60 días. Calcule el importe de la cuota uniforme bimestral diferida anticipada. ¿Cuánto es el interés de la primera cuota uniforme bimestral diferida anticipada?

26. Un préstamo de 50 000 um que tiene 5 períodos diferidos mensuales, se cancela con 8 cuotas uniformes bimestrales anticipadas. Calcule el importe de la renta uniforme diferida anticipada bimestral, si el préstamo devenga una TEA de 0,10. ¿Cuánto es el valor del FRC diferido anticipado?

Cálculo de k en una anualidad simple diferida vencida y diferida anticipada

27. Calcule el número de períodos diferidos mensuales a otorgar en un préstamo de 138 000 000 um que genera una TEM de 0,01 para rembolsarse con 8 cuotas mensuales vencidas de 18 581 746,73 um cada una.

28. Si hoy se efectúa en un banco, un depósito de 1 000 000 um que devenga una TEM de 0,01, calcule el número de períodos diferidos mensuales a partir del cual puede recibir una renta mensual vencida de 179 554,52 um durante 6 meses consecutivos. ¿Cuánto es el interés total generado por la operación?

29. Si hoy se efectúa en un banco un depósito de 100 000 um, que devenga una TEM de 0,02; calcule el número de períodos diferidos mensuales para retirar una renta mensual anticipada de 10 034,74 um durante 12 meses consecutivos, al inicio de cada mes. ¿Cuánto es el interés de la operación?

30. Calcule el número de períodos diferidos mensuales de una anualidad diferida anticipada de 18 rentas mensuales de 2 596,28 um cada una, para que su valor presente a una TEM de 0,03 sea equivalente al valor presente de una anualidad vencida de 12 rentas mensuales de 3 000 que devengan una TEM de 0,02. ¿Cuánto es el interés de la operación?

Cálculo de n en una anualidad simple diferida vencida y diferida anticipada

31. Cuántos pagos uniformes mensuales vencidos de 2 000 um deben realizarse para cancelar un préstamo de 25 400 um que devenga una TEM de 0,01. Este préstamo tiene 6 períodos mensuales diferidos en los cuales no se realiza pago alguno. Si el número de pagos fuese un número no entero:
    a. ¿En qué fecha debe cancelarse la última cuota (no entera), y cuál es el importe por cancelar en esa fecha?
    b. Redondee n al entero inmediato superior y calcule el importe de la última cuota mensual.
    c. Redondee n al entero inmediato inferior y calcule el importe de la última cuota mensual.

32. Cuántos pagos uniformes mensuales anticipados de 4 200 um deben realizarse para cancelar un préstamo de 50 000 um que devenga una TEM de 0,015. Este préstamo tiene 6 períodos mensuales diferidos en los cuales no se realiza pago alguno. Si el número de pagos fuese un número no entero:
    a. En qué fecha debe cancelarse la última cuota (no entera), y cuál es el importe por cancelar en esa fecha.
    b. Redondee n al entero inmediato superior y calcule el importe de la última cuota mensual.
    c. Redondee n al entero inmediato inferior y calcule el importe de la última cuota mensual.

Cálculo de i (TIR) en una anualidad simple diferida vencida y anticipada

33. Un préstamo de 1 000 000 um se amortiza en el plazo de un año con cuotas uniformes mensuales vencidas diferidas de 120 277,72 um. Si el primer pago se efectúa dentro de 4 meses, ¿cuál es la TET cargada en el financiamiento?

34. Un préstamo de 200 000 um que tiene tres periodos diferidos mensuales, se cancela con siete cuotas uniformes mensuales anticipadas de 32 150,85 um. Calcule la TEA aplicada al préstamo.

Resumen del capítulo

Una anualidad simple diferida es un conjunto de rentas cuyo primer pago empieza después de uno o más períodos de tasa (que coincide con el período de renta), tramo denominado intervalo de aplazamiento o plazo diferido.

Durante el plazo diferido compuesto de k períodos, el capital inicial se capitaliza al vencimiento de cada período de pago. El horizonte temporal total está constituido por la suma del plazo diferido y el plazo de la anualidad. Concluido el plazo diferido, la anualidad se convierte en vencida o anticipada de acuerdo con el momento que venza la renta: a fin o inicio de período, respectivamente.

El monto de una anualidad diferida vencida o anticipada es el mismo que le corresponde a sus similares no diferidos, porque en el plazo diferido no se realizan rentas (depósitos o retiros).

El valor presente puede obtenerse al tomar como fecha focal el final del plazo diferido o el momento 0. La fecha focal es el momento del horizonte temporal de la anualidad, que se elije para plantear una ecuación de equivalencia financiera; es el momento en que se realiza la evaluación financiera que implica capitalizaciones o actualizaciones de flujos de caja ubicados en fechas diferentes de la fecha focal. El valor presente se obtiene a partir de rentas diferidas o rentas diferidas anticipadas.

Las rentas diferidas vencidas o anticipadas en función de S, se calculan del mismo modo que en las anualidades no diferidas, ya sean vencidas o anticipadas.

Las rentas diferidas vencidas o anticipadas en función de P, se obtienen al despejar las de sus correspondientes valores presentes.

Con los elementos de una anualidad simple: P, R, R_a, S, i, puede calcularse n o número de rentas. Si se multiplica el valor de n por el tiempo de cada período renta, se obtiene el horizonte temporal. El valor de n puede ser no entero, en este caso puede redondearse n al entero superior o entero inferior para que su valor tenga sentido económico.

De modo similar al despeje de n, puede despejarse la variable k que es el número de períodos diferidos.

Si se conoce P, R, R_a, S y n, puede calcularse la tasa implícita de la anualidad o TIR.

Capítulo 5

ANUALIDADES GENERALES

En ese capítulo se estudian las anualidades cuyos importes de rentas, períodos de rentas y períodos de tasa no son necesariamente uniformes, a las cuales se denominan anualidades generales.

Objetivos del capítulo

Al terminar este capítulo el lector estará capacitado para:

5.1 Definir una anualidad general, e identificar los cinco principales casos que pueden presentarse con relación a: las rentas, períodos de renta, tasa de interés y períodos de tasa.

5.2 Calcular el monto de una anualidad general de acuerdo con los principales casos que pueden presentarse.

5.3 Calcular el valor presente de una anualidad general de acuerdo con los principales casos que pueden presentarse.

5.4 Calcular las rentas de una anualidad general de acuerdo con los principales casos que pueden presentarse.

5.5 Utilizar el FDFA como factor de distribución de rentas vencidas; el FRC como factor de distribución de rentas anticipadas; el FCS y el FAS como factor de agrupamiento de rentas vencidas.

5.6 Calcular n e i (TIR) en una anualidad general.

5.7 Plantear modelos que resuelven problemas de anualidades generales con Excel.

5.1 Anualidad general

Mientras que una anualidad simple es un conjunto de dos o más rentas o flujos de efectivo, en el que a partir del segundo, los períodos de tasa y de renta *son del mismo período*, y los importes de las rentas son uniformes; una anualidad general es aquélla en la cual:

- Los períodos de tasa y los períodos de renta *no son necesariamente del mismo plazo*.
- Los importes de las rentas que componen el horizonte temporal pueden ser uniformes o *variables*.

Casos que pueden presentarse en una anualidad general

En una anualidad general pueden presentarse muchos casos en los cuales los importes de las rentas, los períodos de renta, las tasas de interés y los períodos de tasa son variables. Los principales casos se presentan en la siguiente tabla.

Caso	Rentas	Períodos de renta	Tasa de interés	Períodos de tasa	Otros
1	Uniformes	Uniformes	Uniforme	Uniformes	Varios períodos de tasa por renta
2	Uniformes	Uniformes	Uniforme	Uniformes	Varias rentas por períodos de tasa
3	Variables periódicamente	Uniformes	Uniforme	Uniformes	
4	Variables periódicamente	Uniformes	Uniforme	Uniformes	Las rentas varían de acuerdo con una ley
5	Variables	Variables	Variable	Variables	

Tabla 5.1 Algunos casos de anualidades generales.

De acuerdo con lo indicado anteriormente, se tienen los siguientes casos:

1. Rentas uniformes, períodos de rentas uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniforme, pero el período de renta no coincide con el período de tasa; existen varios períodos de tasa por renta (figura 5.1).

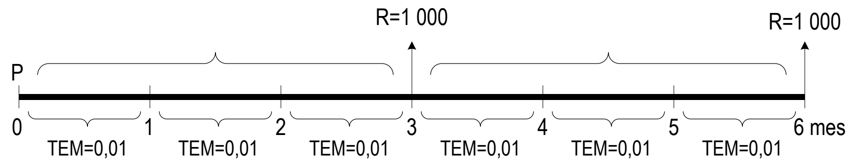


Figura 5.1 Anualidad general con varios períodos de tasa por uno de renta uniforme vencida.

2. Rentas uniformes, períodos de rentas uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniforme, pero el período de renta no coincide con el período de tasa; existen varias rentas por periodo de tasa, (figura 5.2).

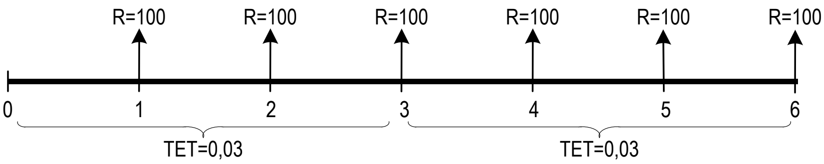


Figura 5.2 Anualidad general con varias rentas uniformes, por un período de tasa.

3. Rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme y períodos de tasa uniformes, (figura 5.3).

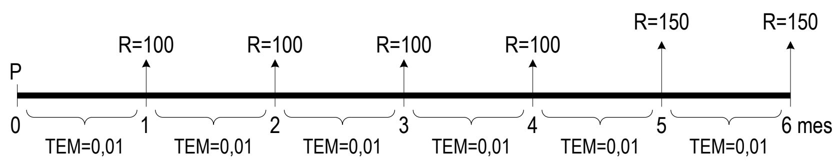


Figura 5.3 Anualidad general con períodos de tasa y períodos de renta iguales pero importes de rentas variables periódicamente.

4. Rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniformes; las rentas varían de acuerdo con una ley (figuras 5.4 y 5.5).

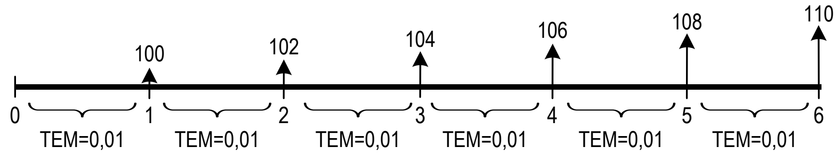


Figura 5.4 Anualidad general con importes de rentas que varían de acuerdo con una ley determinada, períodos renta uniformes, tasas de interés uniforme y períodos de tasa uniformes.

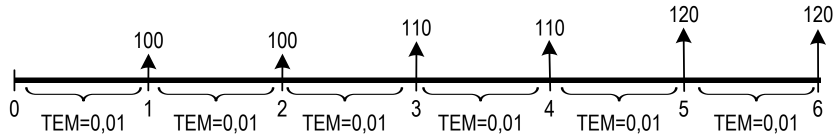


Figura 5.5 Anualidad general cuyos importes de renta varían de acuerdo con una ley determinada.

5. Rentas variables, períodos de renta variables, tasa de interés variable y períodos de tasa variables, (figura 5.6).

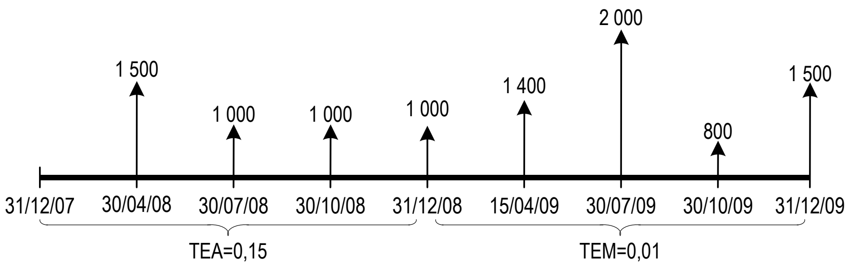


Figura 5.6 Anualidad general con importes de renta, períodos renta, tasas de interés y períodos de tasa variables.

Anualidades cuyos importes de rentas, períodos de renta y de tasa son variables

Cuando en una anualidad general los importes de las rentas, los períodos de las rentas, las tasas efectivas y los períodos de las tasa efectivas son variables, el cálculo de su valor presente, su valor futuro, o sus rentas se efectúa luego de plantear una ecuación de equivalencia financiera en una fecha focal (fecha de evaluación) específica.

Existen diversos procedimientos y combinaciones de factores financieros que pueden utilizarse para dar respuesta directa al problema planteado; no obstante, en la medida de lo posible se sugiere tener en cuenta los siguientes pasos:

- Dibujar el diagrama de flujo de caja de las rentas, ubicar en éste todas sus variables y colocar una interrogante en la variable que se desea obtener.
- Verificar que los períodos de renta y de tasa sean uniformes; si estos plazos no están referidos a una misma unidad de tiempo, se sugiere transformar el período de la tasa para que se corresponda con el período de renta.
- Si los flujos de caja no son uniformes, hay que tratar de formar rentas uniformes y descomponerlas de modo que forme en el horizonte temporal, anualidades simples, en la medida que sea posible.
- Establecer las ecuaciones de equivalencia financiera y resolverlas con los *factores múltiples*.

Los *factores múltiples* son los factores financieros que pueden agruparse convenientemente de acuerdo con las características de las rentas y de las tasas de interés que intervienen en una anualidad.

5.2 Monto de una anualidad general

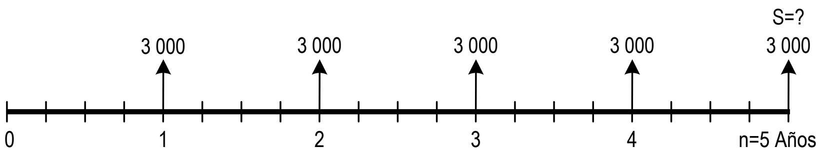
De modo similar a lo trabajado con las anualidades simples, en una anualidad general puede hallarse su valor futuro, su valor presente y convertir sus rentas variables en rentas uniformes, luego de transformar dicha anualidad en una anualidad simple equivalente.

Caso 1. Rentas uniformes, períodos de rentas uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniforme, pero el período de renta no coincide con el período de tasa; existen varios períodos de tasa por renta.

Ejemplo 5.1
Halle el monto quinquenal de una serie de depósitos de 3 000 um cada uno, realizados a fin de cada año, en un banco que los remunera con una TET de 0,03.

Solución
La anualidad general con rentas anuales vencidas y tasa trimestral se transforma en anualidad simple, al convertir la TET en TEA.

R=3 000; n=5; $TEA = 1{,}03^4 - 1 = 0{,}12550881$ se obtiene S con la fórmula (2.1a).



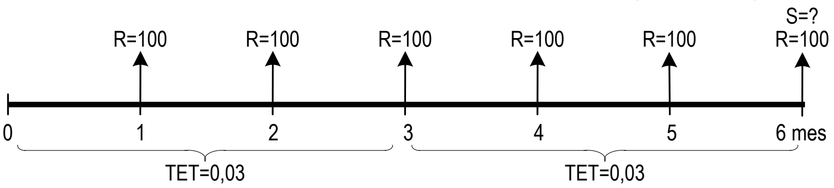
$S = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$ $\qquad$ $S = 3\ 000\left[\frac{1{,}12550881^5-1}{0{,}12550881}\right]$

$S = 3\ 000 \times 6{,}422746217 = 19\ 268{,}24$

En el presente caso la TET=0,03 se convirtió en una TEA=0,12550881 y transformó la anualidad general en una anualidad simple, cuyo valor futuro es 19 268,24 um.

Caso 2. Rentas uniformes, períodos de rentas uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniforme, pero el período de renta no coincide con el período de tasa; existen varias rentas por periodo de tasa.

Ejemplo 5.2
Halle el monto al final del sexto mes, de la anualidad que se presenta en el siguiente diagrama de tiempo valor.



Solución
$TEM = (1 + TET)^{1/3} - 1$ $\qquad$ $TEM = 1{,}03^{1/3} - 1 = 0{,}009901634$

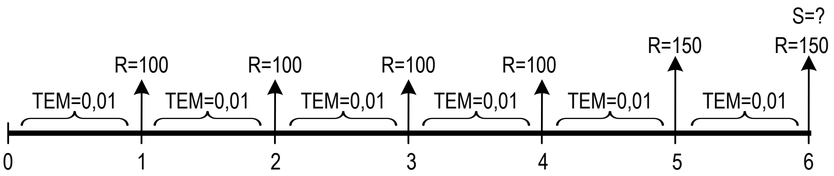
$S = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$ $\qquad$ $S = 100\left[\frac{1{,}009901634^6-1}{0{,}009901634}\right]$

$S = 100 \times 6{,}150499977 = 615{,}05$

La TET=0,03 se convirtió en una TEM=0,009901634 para que coincida con el período de renta; luego se halló el valor futuro de esa anualidad simple

Caso 3. Rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme y períodos de tasa uniformes.

Ejemplo 5.3
Con una TEM de 0,01 y seis rentas mensuales, halle el monto de la anualidad que se presenta en el siguiente diagrama.



Solución

$S = R_1 \left[\frac{(1+i)^4-1}{i}\right](1+i)^2 + R_2\left[\frac{(1+i)^2-1}{i}\right]$

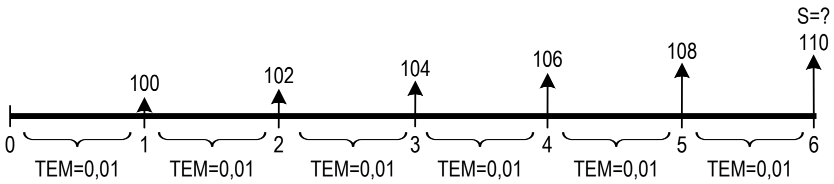
$S = 100\left[\frac{(1+0{,}01)^4-1}{0{,}01}\right] \times 1{,}01^2 + 150\left[\frac{(1+0{,}01)^2-1}{0{,}01}\right]$

$S = 414{,}20 + 301{,}5 = 715{,}70$

La anualidad general se convirtió en dos anualidades simples; la primera de 4 rentas uniformes de 100 um y la segunda de 2 rentas uniformes de 150 um que fueron llevados por equivalencia financiera hacia el momento 6.

Caso 4. Rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniformes; las rentas varían de acuerdo con una ley.

Ejemplo 5.4
Con una TEM de 0,01 halle el monto de la anualidad que se presenta en el siguiente diagrama.

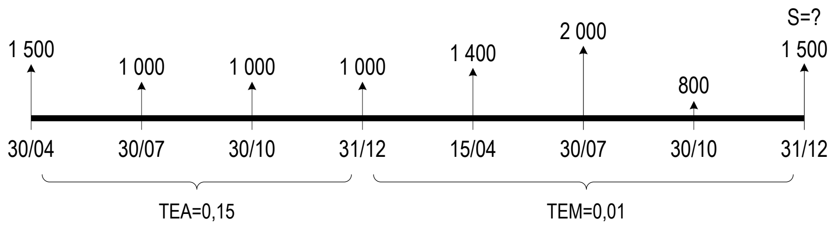


Solución
Aunque la anualidad del problema planteado es una anualidad cuyas rentas varían en una cantidad uniforme o gradientes uniformes, que se estudian en el capítulo 6, en este caso se hallará el monto con el FSC (factor simple de capitalización).

$S = 100 \times 1{,}01^5 + 102 \times 1{,}01^4 + 104 \times 1{,}01^3 + 106 \times 1{,}01^2 + 108 \times 1{,}01^1 + 110 = 645{,}6$

Caso 5. Rentas variables, períodos de renta variables, tasa de interés variable y períodos de tasa variables.

Ejemplo 5.5
Calcule el monto de la anualidad general cuyo diagrama de tiempo valor se muestra en el siguiente gráfico.



Solución
Al tomar como fecha focal el 31/12 del segundo año del horizonte temporal, cada una las rentas se trasladarán por equivalencia financiera, desde el momento de su ocurrencia hasta esa fecha focal. Como las rentas son variables, los períodos de renta son variables, las tasas son variables y los períodos de tasa son variables, debe utilizarse un FSC con variaciones en la tasa de interés, para cada uno de los flujos de caja.

$$S = 1\,500\left(1{,}15^{245/360} \times 1{,}01^{365/30}\right) + 1\,000\left(1{,}15^{154/360} \times 1{,}01^{365/30}\right) + 1\,000\left(1{,}15^{62/360} \times 1{,}01^{365/30}\right)$$
$$+ 1\,000\left(1{,}01^{365/30}\right) + 1\,400\left(1{,}01^{260/30}\right) + 2\,000\left(1{,}01^{154/30}\right) + 800\left(1{,}01^{62/30}\right) + 1\,500$$

$$S = 1\,861{,}99 + 1\,198{,}23 + 1\,156{,}19 + 1\,128{,}70 + 1526{,}09 + 2\,104{,}81 + 816{,}62 + 1\,500 = 11\,292{,}63$$

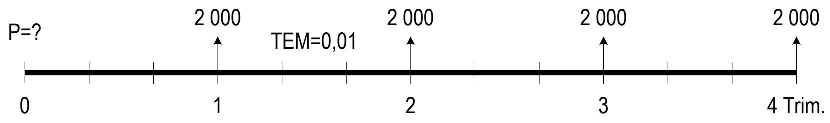
5.3 Valor presente de una anualidad general

El valor presente de una anualidad general se obtiene al descontar las rentas con una tasa de interés, desde su momento de origen hasta el momento cero. A continuación se desarrollan problemas relacionados con los principales casos de anualidades generales, de acuerdo con los casos presentados en la tabla 5.1.

Caso 1. Rentas uniformes, períodos de rentas uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniforme, pero el período de renta no coincide con el período de tasa; existen varios períodos de tasa por renta.

Ejemplo 5.6
Calcule el valor presente de una anualidad en cuyo horizonte temporal anual se realizan pagos vencidos uniformes trimestrales de 2 000 um. Utilice una TEM de 0,01.

Solución
La anualidad general con rentas trimestrales y tasa mensual se transforma en anualidad simple al convertir la TEM en TET. Con los datos trimestrales: R=2 000; n=4; $TET = 1{,}01^3 - 1 = 0{,}030301$ se obtiene P al aplicar la fórmula (2.2a).

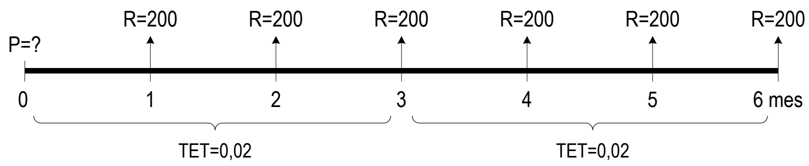


$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$ $\qquad$ $P = 2\ 000\left[\frac{1{,}030301^4-1}{0{,}030301\times 1{,}030301^4}\right]$

$$P = 2\ 000 \times 3{,}714424432 = 7\ 428{,}85$$

Caso 2. Rentas uniformes, períodos de rentas uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniforme, pero el período de renta no coincide con el período de tasa; existen varias rentas por periodo de tasa.

Ejemplo 5.7
Calcule el valor presente de la anualidad cuyos datos se muestran en el siguiente diagrama de tiempo valor.



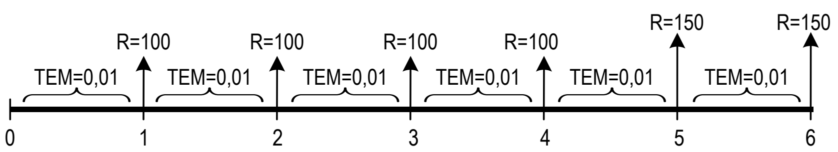
Solución
Se transforma la anualidad general en anualidad simple, al convertir la TET en $TEM = 1{,}02^{1/3} - 1 = 0{,}00662271$.

$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$ $\qquad$ $P = 200\left[\frac{1{,}00662271^6-1}{0{,}00662271\times 1{,}00662271^6}\right]$

$$P = 200 \times 5{,}863343154 = 1\ 172{,}67$$

Caso 3. Rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme y períodos de tasa uniformes.

Ejemplo 5.8
Calcule el valor presente de la anualidad cuyos datos se muestran en el siguiente diagrama de tiempo valor.



Solución
Se trae al presente cada serie de rentas uniformes por separado.

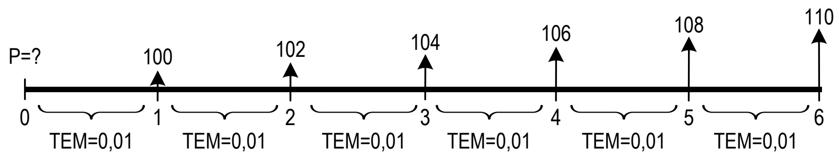
$$P = R_1\left[\frac{(1+i)^4-1}{i(1+i)^4}\right] + R_2\left[\frac{(1+i)^2-1}{i(1+i)^2}\right](1+i)^{-4}$$

$$P = 100\left[\frac{1{,}01^4-1}{0{,}01\times 1{,}01^4}\right] + 150\left[\frac{1{,}01^2-1}{0{,}01\times 1{,}01^2}\right](1+0{,}01)^{-4}$$

$$P = 100\times 3{,}901965552 + 150\times 1{,}970395059\times 0{,}960980344 = 390{,}20 + 284{,}03 = 674{,}23$$

Caso 4. Rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniformes; las rentas varían de acuerdo con una ley.

Ejemplo 5.9
Calcule el valor presente de la anualidad cuyos datos se muestran en el siguiente diagrama de tiempo valor.

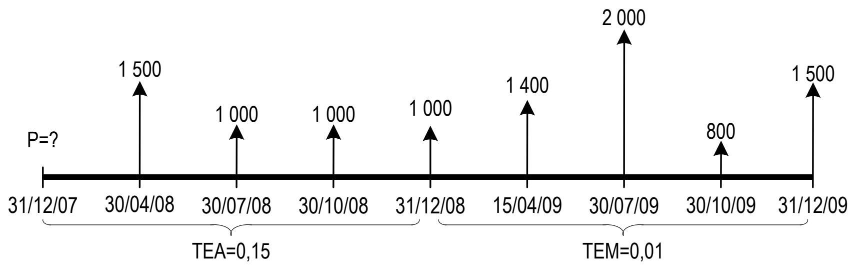


Solución
Aunque la anualidad del problema puede resolverse como el valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en progresión aritmética, en este caso se hallará el valor presente luego de descontar cada flujo con el FSA.

$$P = \frac{100}{1{,}01^1} + \frac{102}{1{,}01^2} + \frac{104}{1{,}01^3} + \frac{106}{1{,}01^4} + \frac{108}{1{,}01^5} + \frac{110}{1{,}01^6} = 608{,}19$$

Caso 5. Rentas variables, períodos de renta variables, tasa de interés variable y períodos de tasa variables.

Ejemplo 5.10
Calcule el valor presente de la anualidad cuyos datos se muestran en el siguiente diagrama de tiempo valor.



Solución
El valor presente se obtiene luego de descontar cada flujo con el FSA.

$$P = \frac{1\,500}{1{,}15^{121/360}} + \frac{1\,000}{1{,}15^{212/360}} + \frac{1\,000}{1{,}15^{304/360}} + \frac{1\,000}{1{,}15^{366/360}} + \frac{1\,400}{1{,}01^{105/30}\times 1{,}15^{366/360}} +$$

$$\frac{2\,000}{1{,}01^{211/30}\times 1{,}15^{366/360}} + \frac{800}{1{,}01^{303/30}\times 1{,}15^{366/360}} + \frac{1\,500}{1{,}01^{365/30}\times 1{,}15^{366/360}}$$

$$P = 1\,431{,}17 + 920{,}99 + 888{,}68 + 867{,}54 + 1\,172{,}99 + 1\,617{,}81 + 627{,}67 + 1\,152{,}94 = 8\,679{,}78$$

5.4 Rentas de una anualidad general

Se desarrollarán ejemplos para cada uno de los casos de las anualidades generales.

Caso 1. Rentas uniformes, períodos de rentas uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniforme, pero el período de renta no coincide con el período de tasa; existen varios períodos de tasa por renta.

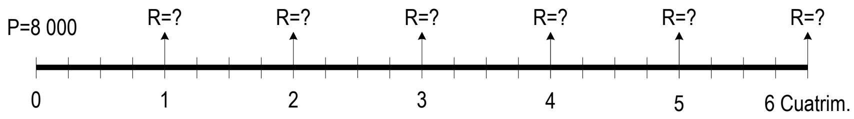
Ejemplo 5.11

Calcule el importe de la renta uniforme vencida cuatrimestral que durante dos años amortice una deuda de 8 000 um. Para estos efectos utilice una TEM de 0,01.

Solución

La anualidad general se transforma en anualidad simple al convertir la TEM en $TEC = (1 + TEM)^{120/30} - 1$

$TEC = 1{,}01^{120/30} - 1 = 0{,}04060401.$



$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$ $\qquad R = 8\ 000\left[\frac{0{,}04060401\times 1{,}04060401^6}{1{,}04060401^6-1}\right]$

$R = 8\ 000 \times 0{,}191137173$

Caso 2. Rentas uniformes, períodos de rentas uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniforme, pero el período de renta no coincide con el período de tasa; existen varias rentas por periodo de tasa.

Ejemplo 5.12

Un préstamo de 10 000 um debe cancelarse en el plazo de medio año con cuotas uniformes vencidas que se pagarán cada 30 días, si el préstamo devenga una TET de 0,04 calcule el importe de la renta uniforme vencida.

Solución

La anualidad general se transforma en anualidad simple al convertir la TET en $TEM = (1 + TET)^{30/90} - 1$

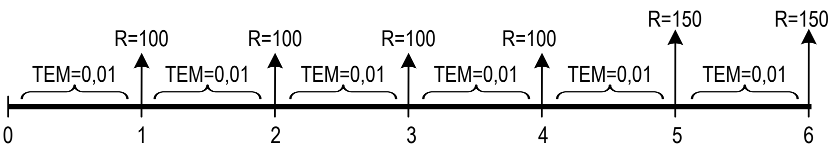
$TEM = 1{,}04^{30/90} - 1 = 0{,}013159404.$

$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$ $\qquad R = 10\ 000\left[\frac{0{,}013159404\times 1{,}013159404^6}{1{,}013159404^6-1}\right] = 1\ 744{,}27$

Caso 3. Rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme y períodos de tasa uniformes.

Ejemplo 5.13

Calcule la renta uniforme vencida mensual equivalente de la anualidad que se muestra en el siguiente gráfico.



Solución

Para convertir la anualidad con rentas variables, en una anualidad simple de rentas uniformes, se traen todas las rentas al momento cero, y luego este stock de efectivo se convierte en una renta uniforme.

Cálculo del valor presente:

$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$ $\qquad P = 100\left[\frac{1{,}01^4-1}{0{,}01\times 1{,}01^4-1}\right] + 150\left[\frac{1{,}01^2-1}{0{,}01\times 1{,}01^2-1}\right]\left[\frac{1}{1{,}01^4}\right]$

$P = 100 \times 3{,}901965552 + 150 \times 1{,}970395059 \times 0{,}960980344$

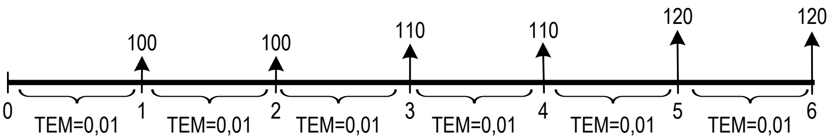
$P = 390{,}20 + 284{,}03 = 674{,}27$

Cálculo de la renta uniforme:

$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad R = 674{,}27\left[\frac{0{,}01\times 1{,}01^6}{1{,}01^6 - 1}\right] = 674{,}27 \times 0{,}172548366 = 116{,}34$

Caso 4. Rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniformes; las rentas varían de acuerdo con una ley.

Ejemplo 5.14
Convierta la anualidad general que se muestra en el siguiente gráfico, en una anualidad simple de rentas uniformes mensuales vencidas.



Solución
Para convertir la anualidad general en una anualidad simple se traen todas las rentas al momento cero, y luego este stock de efectivo se convierte en rentas uniformes.

Cálculo del valor presente:

$P = 100\left[\frac{1{,}01^2 - 1}{0{,}01\times 1{,}01^2 - 1}\right] + 110\left[\frac{1{,}01^2 - 1}{0{,}01\times 1{,}01^2 - 1}\right]\left[\frac{1}{1{,}01^2}\right] + 120\left[\frac{1{,}01^2 - 1}{0{,}01\times 1{,}01^2 - 1}\right]\left[\frac{1}{1{,}01^4}\right]$

$P = 100 \times 1{,}970395059 + 110 \times 1{,}970395059 \times 0{,}960980344 + 120 \times 1{,}970395059 \times 0{,}960980344$

$P = 197{,}04 + 212{,}47 + 227{,}22 = 636{,}73$

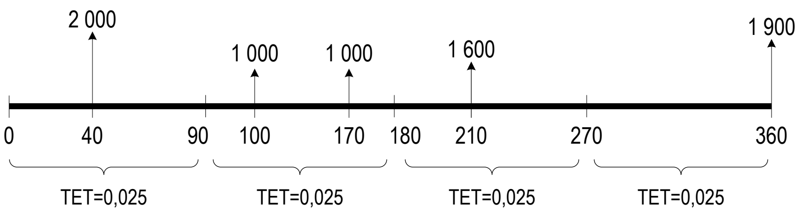
Cálculo de la renta uniforme:

$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad R = 636{,}73\left[\frac{0{,}01\times 1{,}01^6}{1{,}01^6 - 1}\right]$

$R = 636{,}73 \times 0{,}172548366 = 109{,}87$

Caso 5. Rentas variables, períodos de renta variables, tasa de interés variable y períodos de tasa variables.

Ejemplo 5.15
Convierta la anualidad general que se muestra en el siguiente gráfico, en una anualidad simple de rentas uniformes trimestrales mensuales vencidas.



Solución
Para convertir la anualidad general en una anualidad simple se traen todas las rentas al momento cero, y luego este stock de efectivo se convierte en rentas uniformes con el FRC.

Cálculo del valor presente:

$P = \frac{2\,000}{1{,}025^{40/90}} + \frac{1\,000}{1{,}025^{100/90}} + \frac{1\,000}{1{,}025^{170/90}} + \frac{1\,600}{1{,}025^{210/90}} + \frac{1\,900}{1{,}025^{360/90}}$

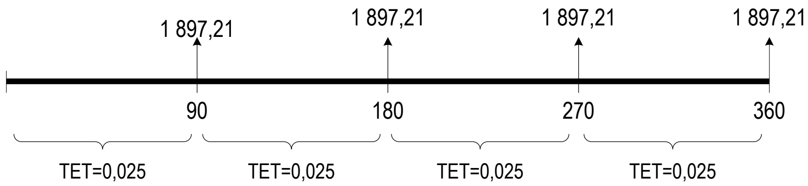
$P = 1\,978{,}17 + 972{,}94 + 954{,}43 + 1\,510{,}42 + 1\,721{,}31 = 7\,137{,}26$

Cálculo de la renta uniforme:

$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$ $\qquad R = 7\,137{,}26\left[\frac{0{,}025 \times 1{,}025^4}{1{,}024^4 - 1}\right]$

$R = 7\,137{,}26 \times 0{,}265817877 = 1\,897{,}21$

La anualidad general original se convirtió en la anualidad simple vencida que se muestra en el siguiente gráfico.



5.5 Factores de distribución y agrupamiento

En las anualidades generales, cuando se presentan los casos 1 y 2, las rentas vencidas o anticipadas cuyos períodos no coinciden con los períodos de tasas, pueden convertirse en rentas equivalentes, como se muestran en las figuras 5.7; 5.8; 5.9 y 5.10.

Factor de distribución

Es un factor financiero que permite hallar rentas equivalentes de otra renta proporcionada como dato, de mayor importe y mayor período de renta. Para el caso de una renta vencida se utiliza el FDFA; y para el caso de una renta anticipada se utiliza el FRC (figuras 5.7 y 5.8).

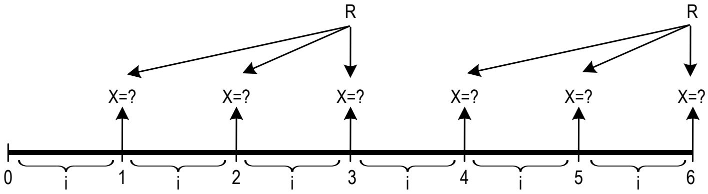


Figura 5.7 FDFA como factor de distribución, aplicado a R para convertirla en rentas vencidas equivalentes de importe X de menor plazo, que coinciden con el plazo de la tasa de interés.

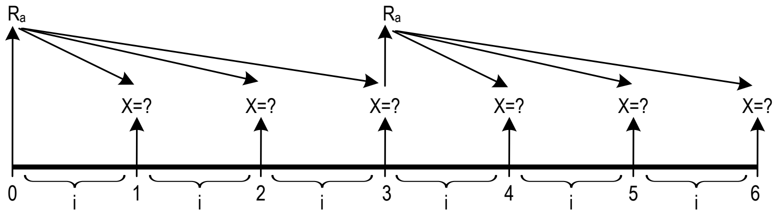


Figura 5.8 FRC como factor de distribución, aplicado a Ra para convertirla en rentas vencidas equivalentes de importe X de menor plazo, que coinciden con el plazo de la tasa de interés.

Factor de agrupamiento

Es un factor financiero que permite hallar una renta equivalente de otras rentas proporcionadas como datos, de menores importes y menores períodos de renta. Para el caso de una renta vencida se utiliza el FCS; y para el caso de una renta anticipada se utiliza el FAS (figuras 5.9 y 5.10).

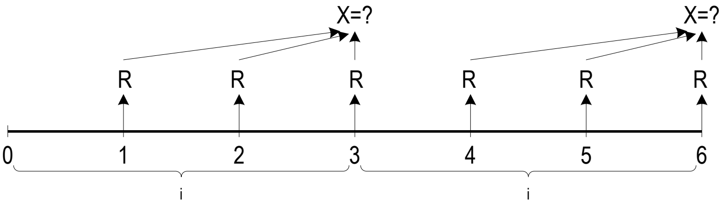


Figura 5.9 FCS como factor de agrupamiento, aplicado a R para convertirla en rentas vencidas equivalentes de importe X de mayor plazo, que coinciden con el plazo de la tasa de interés.

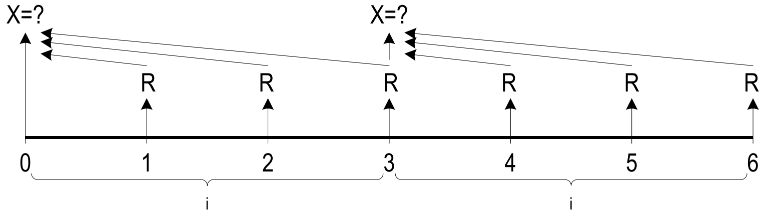
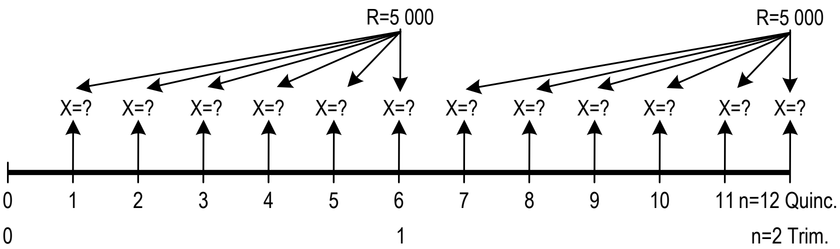


Figura 5.10 FAS como factor de agrupamiento, aplicado a R para convertirlas en rentas anticipadas equivalentes de importe X de mayor plazo, que coinciden con el plazo de la tasa de interés.

Ejemplo 5.16

Con una TEA de 0,15 remplace pagos de 5 000 um que deben realizarse al final de cada trimestre por pagos equivalentes que se realizarán al final de cada quincena.



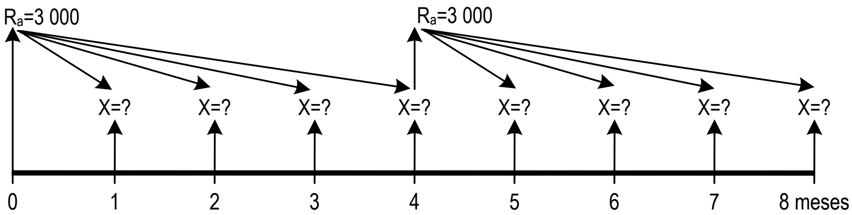
Solución
La anualidad general con rentas trimestrales y tasa anual se transforma en anualidad simple al convertir la TEA en TEQ, y utilizar el FDFA como factor de distribución rentas vencidas.

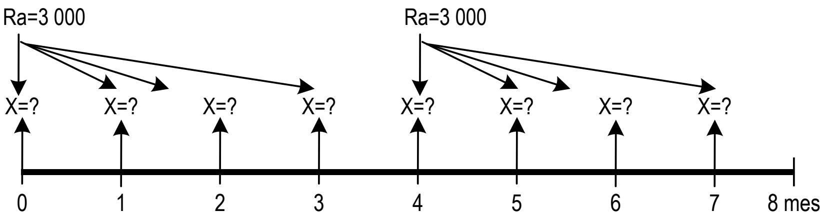
$TEQ = (1 + TEA)^{15/360} - 1 \qquad TEQ = 1{,}15^{15/360} - 1 = 0{,}005840403$

$R = S\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad X = 5\ 000\left[\frac{0{,}005840403}{1{,}005840403^6 - 1}\right]$

$X = 5\ 000 \times 0{,}1642496982 = 821{,}25$

Ejemplo 5.17
Una persona que debe amortizar al inicio de cada cuatrimestre un importe de 3 000 um por un préstamo recibido de un banco, solicita su fraccionamiento en pagos uniformes mensuales. Calcule el importe de las cuotas uniformes mensuales vencidas y anticipadas equivalentes, con una TEA de 0,12.





Solución
La anualidad general con rentas cuatrimestrales anticipadas y tasa anual se transforma en anualidad simple vencida al convertir la TEA en TEM, y utilizar el FRC como factor de distribución rentas anticipadas.

$TEM = (1 + TEA)^{1/12} - 1 \qquad TEM = 1{,}12^{1/12} - 1 = 0{,}009488793.$

Renta vencida equivalente

$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad X = 3\ 000\left[\frac{0{,}009488793 \times 1{,}009488793^4}{1{,}009488793^4 - 1}\right]$

$X = 3\ 000 \times 0{,}255958498 = 767{,}88$

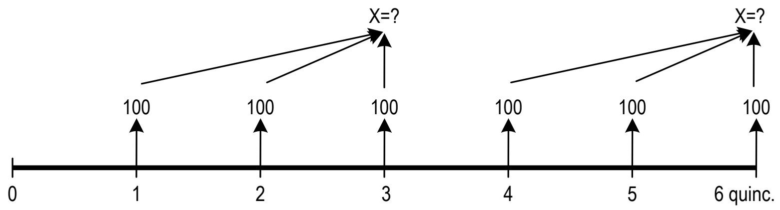
Renta anticipada equivalente

$R_a = P\left[(1+i)^{-1} \times \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$

$R_a = 3\ 000\left[1{,}009488793^{-1} \times \frac{0{,}009488793 \times 1{,}009488793^4}{1{,}009488793^4 - 1}\right]$

$R_a = 3\ 000 \times 0{,}25355259 = 760{,}66$

Ejemplo 5.18
Un préstamo se amortiza con cuotas uniformes vencidas quincenales de 100 um. Las condiciones del crédito se modifican para que los pagos uniformes vencidos se realicen cada 45 días con una TEQ de 0,01. Calcule el importe equivalente de la renta uniforme vencida de 45 días.



Solución
La anualidad general con rentas uniformes vencidas que deben pagarse cada quince días y TEQ, se transforma en anualidad simple vencida con rentas uniformes vencidas que deben pagarse cada 45 días, al utilizar el FCS como factor de agrupamiento de rentas vencidas.

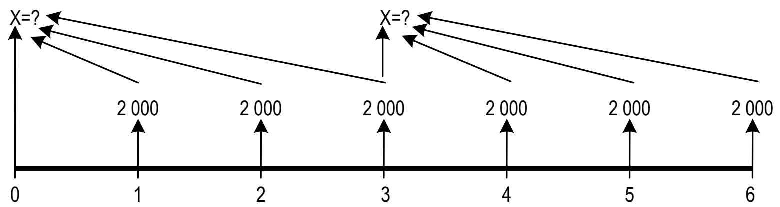
$TEQ = 0{,}01$ $\quad R = 100$ $\quad n = 3.$

$S = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$ $\quad X = 100\left[\frac{(1+0{,}01)^3-1}{0{,}01}\right].$

$X = 100 \times 3{,}0301 = 303{,}01$

Ejemplo 5.19
Las cuotas uniformes mensuales vencidas de 2 000 um que amortizan un préstamo que devenga una TEM de 0,01, deben transformarse por equivalencia financiera en cuotas uniformes trimestrales anticipadas; calcule dicha cuota.

Solución
En el presente caso se utilizará el FAS como factor de agrupamiento de rentas uniformes vencidas.



$TET = (1 + TEM)^{90/30} - 1$ $\quad TE = 1{,}01^{90/30} - 1 = 0{,}030301$

$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$ $\quad X = 2\ 000\left[\frac{1{,}030301^3-1}{0{,}030301 \times 1{,}030301^3}\right].$

$X = 2\ 000 \times 2{,}826975207 = 5\ 653{,}95$

5.6 Cálculo de n e i (TIR) en una anualidad general

Cálculo de n en una anualidad general

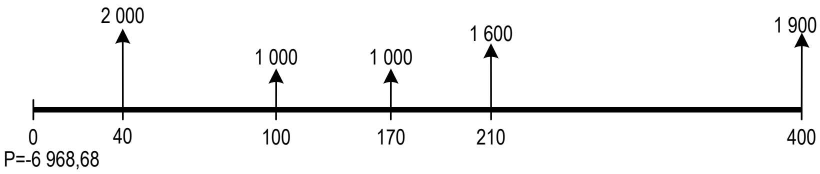
El valor de n en una anualidad general, está dado por el número de rentas de diferentes importes y de diferentes períodos que se realizan en el horizonte temporal. Si en la anualidad general los importes de las rentas y los períodos de rentas son uniformes, entonces se puede calcular el valor de n luego de convertir la anualidad general en anualidad simple y aplicar las fórmulas de n para dichas anualidades, sean vencidas, anticipadas o diferidas.

Cálculo de i en una anualidad general

Para calcular el valor de i en una anualidad general es necesario plantear una ecuación de equivalencia financiera, y a partir de esa ecuación obtener el valor de i por el método de "prueba y error". Cada ecuación se formula de acuerdo con las características de los valores de las variables del problema planteado.

Ejemplo 5.16

Un préstamo de 6 968,68 um debe amortizarse en un plazo de 400 días con las cuotas cuyos importes y vencimientos se grafican en el siguiente diagrama. Calcule la TEA (de 360 días) que se aplicó en esta operación.



Solución

El valor de i se obtiene a partir de la siguiente ecuación de equivalencia financiera.

$$6\,968{,}68=\frac{2\,000}{(1+i)^{40/360}}+\frac{1\,000}{(1+i)^{100/360}}+\frac{1\,000}{(1+i)^{170/360}}+\frac{1\,600}{(1+i)^{210/360}}+\frac{1\,900}{(1+i)^{400/360}}$$

La ecuación anterior no tiene solución algebraica, por lo tanto se asignarán valores a i de modo que el segundo miembro sea 6 968,68.

i	Valor presente
0,148	6 974,94
0,152	6 962,44

En el cuadro anterior se observa que la tasa i es mayor que 0,148 pero menor que 0,152; por lo tanto se interpolará linealmente entre estos dos valores para hallar su valor aproximado.

Al hacer

$$x_1 = 0{,}148 \qquad y_1 = 6\,974{,}94$$
$$x = ? \qquad y = 6\,968{,}68$$
$$x_2 = 0{,}152 \qquad y_2 = 6\,962{,}44$$

Y al aplicar la fórmula (2.8) se tiene:

$$x= x_1+\frac{y-y_1}{y_2-y_1}(x_2-x_1)$$

$$x= 0{,}148+\frac{6\,968{,}68-6\,974{,}94}{6\,962{,}44-6\,974{,}94}(0{,}152-0{,}148)$$

$$x= 0{,}15$$

La TEA aproximada linealmente al verdadero valor de i es 0,15.

5.7 Modelos de anualidades generales con Excel

A continuación se presentan problemas de anualidades generales resueltos en forma tradicional y con modelos implementados en una hoja de Excel, en los cuales se utilizan las Funciones Financieras Personalizadas (FFP).

Monto de una anualidad general

1. Con una TEM de 0,01, halle el monto de una anualidad de 3 años, que tiene 12 rentas uniformes trimestrales vencidas de 4 000 um (Caso 1 rentas uniformes, períodos de rentas uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniforme, pero el período de renta no coincide con el período de tasa; existen varios períodos de tasa por renta).

Solución
Con los datos R=4 000; TET=$1{,}01^3$-1=0,030301; n=12; se calcula S.

$S = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$ $\qquad$ $S = 4\,000\left[\frac{1{,}030301^{12}-1}{0{,}030301}\right]$

$$S = 4\,000 \times 14{,}21632235$$

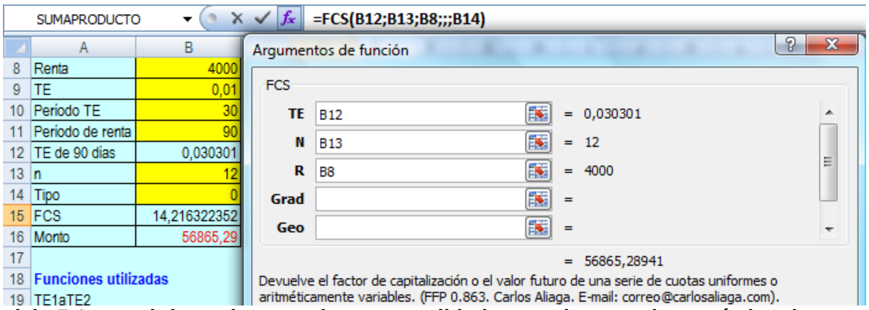


Figura 5.11 Modelo 5.1 que obtiene el monto de una anualidad general con varios períodos de tasa por período de renta.

2. Calcule el monto de una anualidad cuya fecha de inicio es el 20 de mayo y su fecha de término es el 15 de mayo del año siguiente (no bisiesto); en este período se realizan depósitos de 1 000 um al final de cada 30 días. Estos depósitos devengan una TEA de 0,08. (Caso 2 rentas uniformes, períodos de rentas uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniforme, pero el período de renta no coincide con el período de tasa; existen varias rentas por periodo de tasa).

Solución
Con los datos R=1 000; TEM=$1{,}08^{1/12}$-1=0,00643403; n=12; se calcula S.

$S = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$ $\qquad$ $S = 1\,000\left[\frac{1{,}00643403^{12}-1}{0{,}00643403}\right]$

$S = 1\,000 \times 12{,}43388648 = 12\,433{,}89$

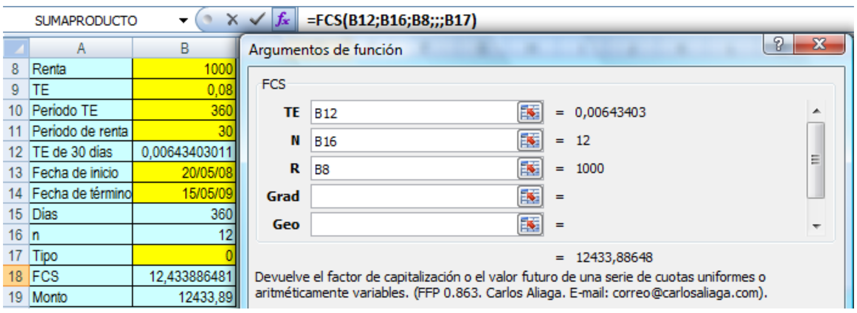
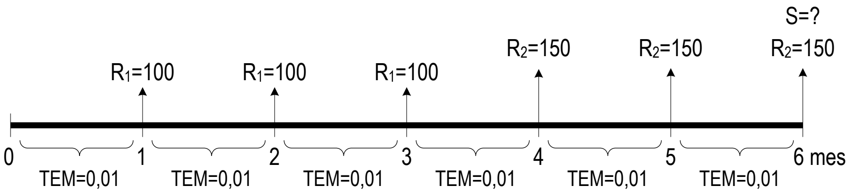


Figura 5.12 Modelo 5.2 que obtiene el monto de una anualidad general con varios períodos de renta por período de tasa.

3. En un período de medio año se realizan rentas mensuales vencidas de 100 um durante el primer trimestre, y rentas mensuales vencidas de 150 um durante el segundo trimestre. Calcule el monto de esa anualidad general con una TEM de 0,01. (Caso 3 rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme y períodos de tasa uniformes).

Solución

Con los datos R_1=100; R_2=150; TEM=1,01; n=12; se calcula S.



$$S = R_1\left[\frac{(1+i)^3-1}{i}\right](1+i)^3 + R_2\left[\frac{(1+i)^3-1}{i}\right]$$

$$S = 100\left[\frac{(1+0{,}01)^3-1}{0{,}01}\right] \times 1{,}01^3 + 150\left[\frac{(1+0{,}01)^3-1}{0{,}01}\right]$$

$$S = 312{,}191506 + 454{,}515 = 766{,}71$$

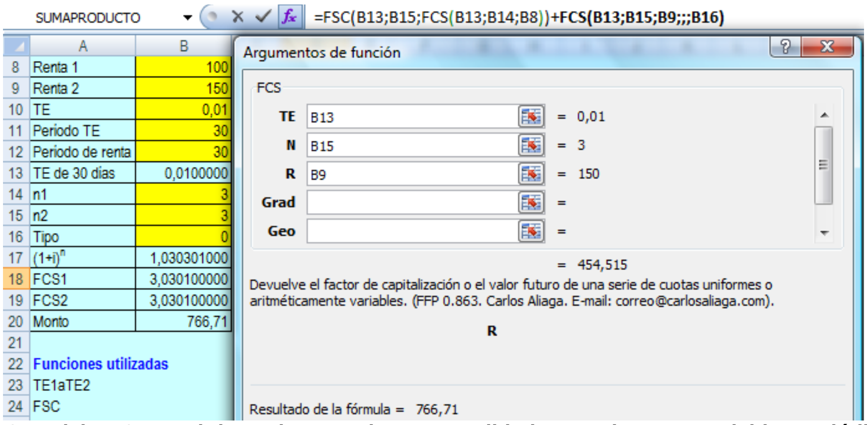


Figura 5.13 Modelo 5.3 que obtiene el monto de una anualidad general, rentas variables periódicamente.

4. En un período semestral se depositan al final de cada mes, rentas que se incrementan en 50 um cada mes. El importe de la primera renta es 1 000 um y el fondo devenga una TEM de 0,01; calcule el monto de esta operación. (Caso 4 rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniformes; las rentas varían de acuerdo con una ley).

Solución

Con los datos R=variables; TEM=1,01; n=6; se calcula S.

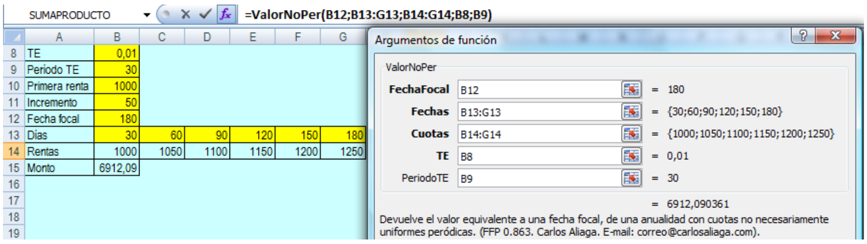
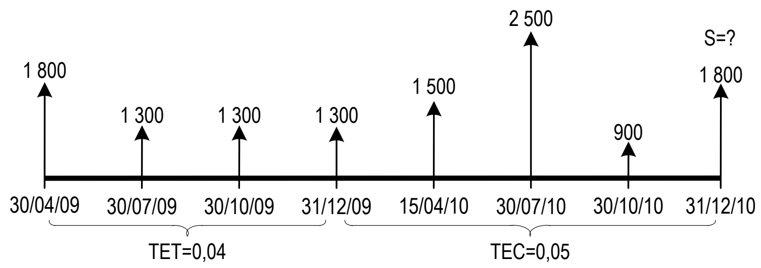


Figura 5.14 Modelo 5.4 que obtiene el monto de una anualidad general con rentas que varían de acuerdo con una ley.

$$S = 1\,000 \times 1{,}01^5 + 1\,050 \times 1{,}01^4 + 1\,100 \times 1{,}01^3 + 1\,150 \times 1{,}01^2 + 1\,200 \times 1{,}01^1 + 1\,250 = 6\,912{,}09$$

5. Calcule el monto de la anualidad general cuyo diagrama de tiempo valor se muestra en el siguiente gráfico. (Caso 5 rentas variables, períodos de renta variables, tasa de interés variable y períodos de tasa variables).



Solución
Con los datos del diagrama de tiempo valor se tiene la siguiente ecuación que obtiene el monto de la anualidad general.

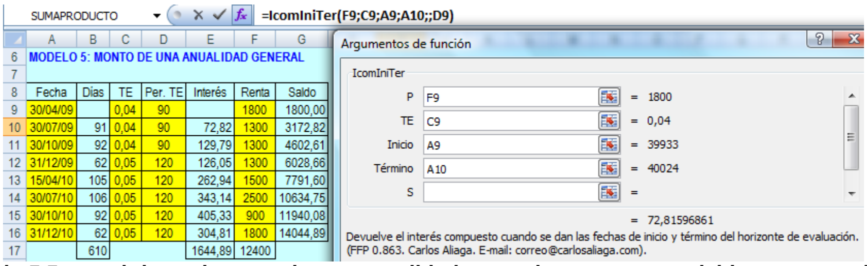
$$S = 1\,800\left(1{,}04^{245/90} \times 1{,}05^{365/120}\right) + 1\,300\left(1{,}04^{154/90} \times 1{,}05^{365/120}\right) +$$

$$1\,300\left(1{,}04^{62/90} \times 1{,}05^{365/120}\right) + 1\,300\left(1{,}05^{365/120}\right) +$$

$$1\,500\left(1{,}05^{260/120}\right) + 2\,500\left(1{,}05^{154/120}\right) + 900\left(1{,}05^{62/120}\right) + 1\,800$$

$$S = 2\,323{,}23 + 1\,612{,}65 + 1\,549{,}27 + 1\,507{,}97 + 1\,667{,}25 + 2\,661{,}54 +$$

$$922{,}98 + 1\,800 = 14\,044{,}89$$


SUMAPRODUCTO =IcomIniTer(F9;C9;A9;A10;;D9)

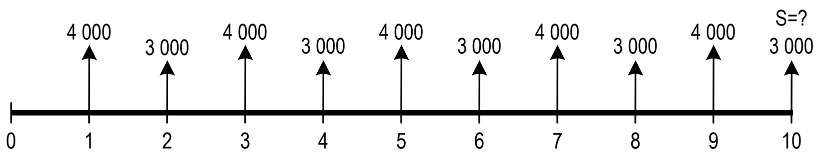
MODELO 5: MONTO DE UNA ANUALIDAD GENERAL

	A	B	C	D	E	F	G
8	Fecha	Días	TE	Per. TE	Interés	Renta	Saldo
9	30/04/09		0,04	90		1800	1800,00
10	30/07/09	91	0,04	90	72,82	1300	3172,82
11	30/10/09	92	0,04	90	129,79	1300	4602,61
12	31/12/09	62	0,05	120	126,05	1300	6028,66
13	15/04/10	105	0,05	120	262,94	1500	7791,60
14	30/07/10	106	0,05	120	343,14	2500	10634,75
15	30/10/10	92	0,05	120	405,33	900	11940,08
16	31/12/10	62	0,05	120	304,81	1800	14044,89
17		610			1644,89	12400	

Argumentos de función
IcomIniTer
P F9 = 1800
TE C9 = 0,04
Inicio A9 = 39933
Término A10 = 40024
S =
= 72,81596861
Devuelve el interés compuesto cuando se dan las fechas de inicio y término del horizonte de evaluación.
(FFP 0.863. Carlos Aliaga. E-mail: correo@carlosaliaga.com).

Figura 5.15 Modelo 5.5 que obtiene el monto de una anualidad general, con rentas variables, tasas variables y períodos de tasa variables.

6. Con una TEM de 0,01 y 10 períodos mensuales, halle el monto de la anualidad que se presenta en el siguiente diagrama.



Solución
Los flujos de caja del problema planteado pueden desagregarse como se muestran en los gráficos 1 y 2.

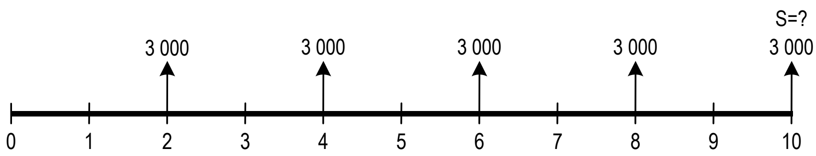


Gráfico 1.

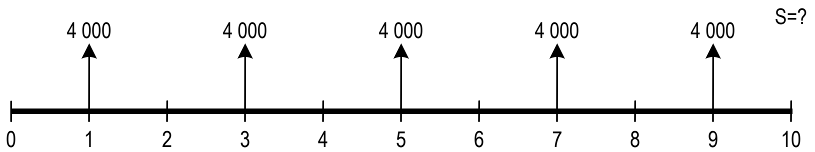


Gráfico 2.

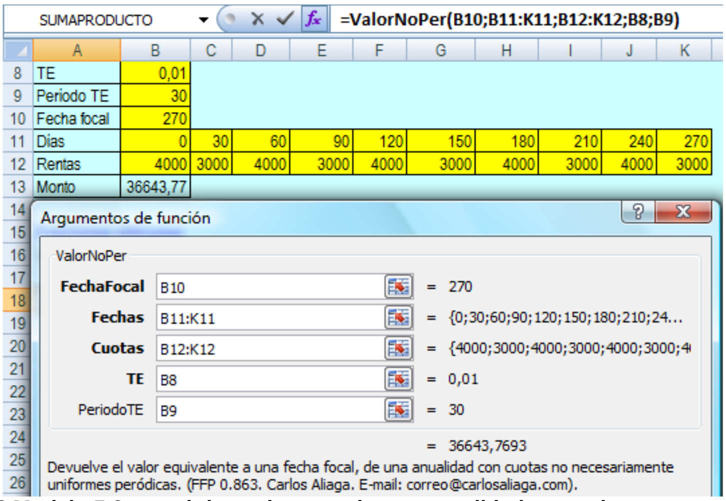


Figura 5.16 Modelo 5.6 que obtiene el monto de una anualidad general, con rentas variables.

$TEB = (1 + EM)^2 - 1 \qquad TEB = 1{,}01^2 - 1 = 0{,}0201$

$S_1 = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \qquad S_1 = 3\,000\left[\frac{1{,}0201^5 - 1}{0{,}0201}\right]$

$S_1 = 3\,000 \times 5{,}205080866 = 15\,615{,}24$

$S_2 = R_a\left[(1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1 + TEM)^{-1}$

$S_2 = 4\,000\left[1{,}0201 \times \frac{1{,}0201^5 - 1}{0{,}0201}\right](1 + 0{,}01)^{-1}$

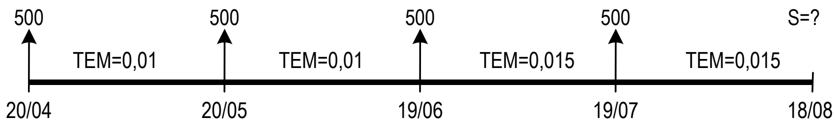
$S_2 = 4\,000 \times 5{,}257131675 = 21\,028{,}53$

El monto de la anualidad general se obtiene al sumar los montos de la anualidad vencida de 3 000 um y de la anualidad anticipada de 4 000 um.

$S = S_1 + S_2 \qquad S = 15\,615{,}24 + 21\,028{,}53 = 36\,643{,}77$

7. El día 18 de agosto deben pagarse los importes de 4 letras de cambio de 500 um, cada una de las cuales vencieron el 20 de abril, 20 de mayo, 19 de junio y 19 de julio del mismo año, respectivamente. Si la TEM de mora fue 0,01 hasta el 19 de junio y de allí en adelante la TEM se incrementó a 0,015, ¿cuál es el importe total de la deuda en mora por pagar el 18 de agosto?

Solución
Se requiere hallar el monto de una anualidad anticipada con variaciones en la tasa de interés.



$S = 500\big(1{,}01 \times FCS_{0{,}01;2}.\,FSC_{0{,}015;2}\big) + 500\big(1{,}015 \times FCS_{0{,}015;2}\big)$

$S = 1\,045{,}73 + 1\,022{,}61$

$S = 2\,068{,}34$

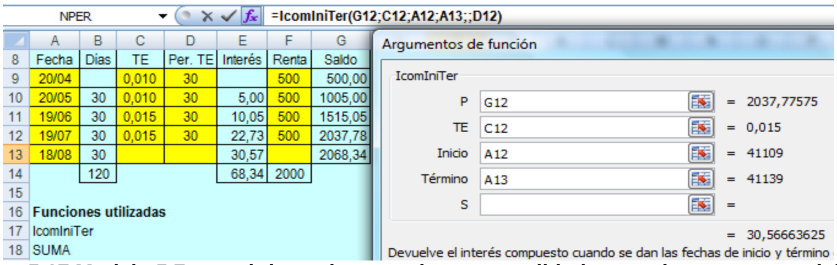
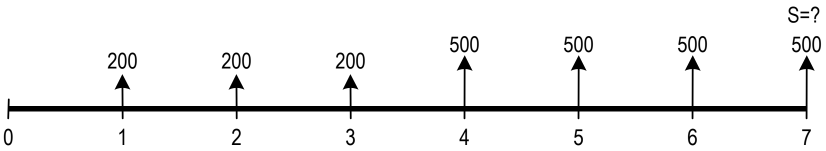


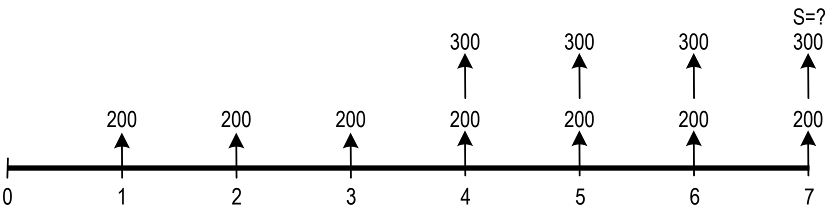
Figura 5.17 Modelo 5.7 que obtiene el monto de una anualidad general, con tasas variables.

8. En el siguiente diagrama de flujo de caja cuyos períodos de renta son trimestrales, calcule el valor de S con una TNM de 0,02.



Solución

Los flujos ubicados en los trimestres 4 al 7 pueden ser descompuestos en la suma de flujos de 200 um y 300 um para formar dos anualidades independientes que puedan llevarse al futuro con el FCS a una TET de 0,06.



$S = 200.FCS_{0,06;7} + 300.FCS_{0,06;4} = 1\ 678,77 + 1\ 312,38 = 2\ 991,15$

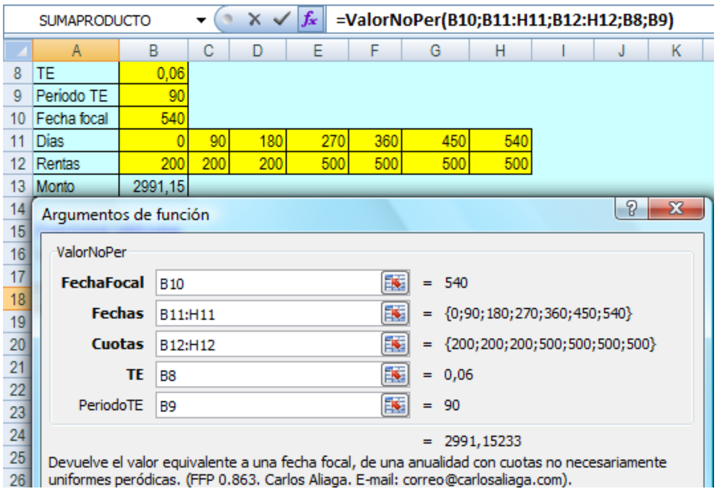


Figura 5.18 Modelo 5.8 que obtiene el monto de una anualidad general, con rentas variables.

Valor presente de una anualidad general

9. En un período de 10 meses un proyecto genera flujos de caja bimestrales vencidos de 2 000 um. Si el costo de oportunidad del capital es una TEM de 0,01, halle el valor presente de los flujos de caja de dicho proyecto. (Caso 1 rentas uniformes, períodos de rentas uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniforme, pero el período de renta no coincide con el período de tasa; existen varios períodos de tasa por renta).

Solución

Con los datos R=2 000; TEB=$1,01^2$-1=0,0201; n=5; se calcula P.

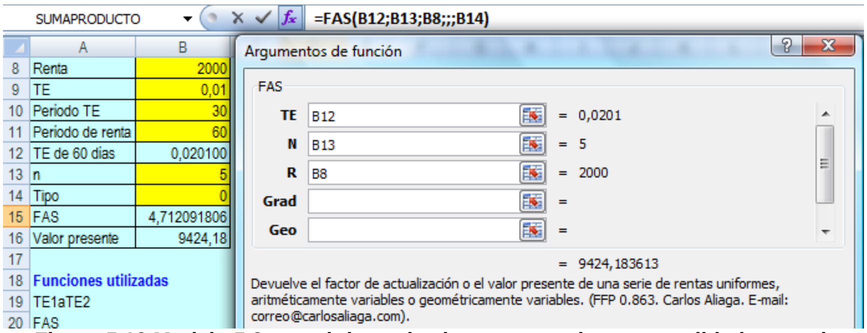


Figura 5.19 Modelo 5.9 que obtiene el valor presente de una anualidad general.

$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$ $\qquad P = 2\,000\left[\frac{1{,}0201^5-1}{0{,}0201\times 1{,}0201^5}\right]$

$P = 2\,000 \times 4{,}712091806 = 9\,424{,}18$

10. Un proyecto que tiene una vida útil de 5 años puede generar flujos de caja semestrales de 10 000 um en ese período. Calcule el valor presente de dichos flujos, si el costo de oportunidad es una TEA de 0,18 durante los dos primeros años y una TEA de 0,15 durante los últimos tres años. (Caso 2 rentas uniformes, períodos de rentas uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniforme, pero el período de renta no coincide con el período de tasa; existen varias rentas por periodo de tasa).

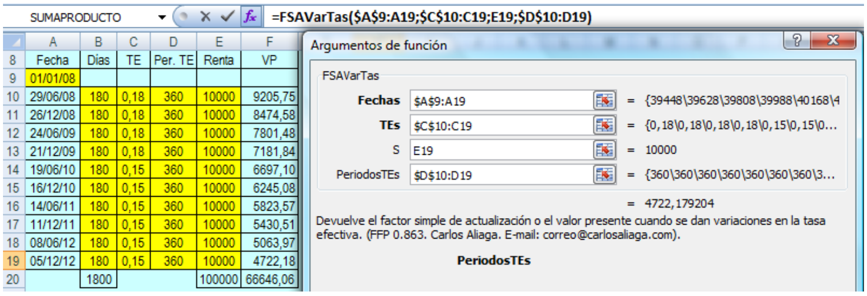
Solución
Con los datos R=10 000; TEA_1=0,18; TEA_2=0,15; n_1=4; n_2=6; se calcula P.

$P = R\left[\frac{(1+i_1)^{n_1}-1}{i_1(1+i_1)^{n_1}}\right] + R\left[\frac{(1+i_2)^{n_2}-1}{i_2(1+i_2)^{n_2}}\right](1+i_1)^{n_1}$

$TES_1 = 1{,}18^{1/2} - 1 = 0{,}086278049 \qquad TES_2 = 1{,}15^{1/2} - 1 = 0{,}072380529$

$P = 10\,000\left[\frac{1{,}086278049^4-1}{0{,}086278049\times 1{,}086278049^4}\right] + \quad 10\,000\left[\frac{1{,}072380529^6-1}{072380529\times 1{,}072380529^6}\right](1{,}086278049^{-4})$

$P = 10\,000 \times 3{,}266364656 + 10\,000 \times 4{,}731711278 \times 0{,}71818443 = 66\,646{,}06$



	A	B	C	D	E	F
8	Fecha	Dias	TE	Per. TE	Renta	VP
9	01/01/08					
10	29/06/08	180	0,18	360	10000	9205,75
11	26/12/08	180	0,18	360	10000	8474,58
12	24/06/09	180	0,18	360	10000	7801,48
13	21/12/09	180	0,18	360	10000	7181,84
14	19/06/10	180	0,15	360	10000	6697,10
15	16/12/10	180	0,15	360	10000	6245,08
16	14/06/11	180	0,15	360	10000	5823,57
17	11/12/11	180	0,15	360	10000	5430,51
18	08/06/12	180	0,15	360	10000	5063,97
19	05/12/12	180	0,15	360	10000	4722,18
20		1800			100000	66646,06

Figura 5.20 Modelo 5.10 que obtiene el valor presente de una anualidad general con variaciones en la tasa de interés. Utiliza la FFP FSAVarTas.

11. Un proyecto de inversión puede generar flujos de caja anuales de 5 000 um durante los dos primeros años de vida útil y de 7 000 um durante sus tres últimos años. Calcule el valor presente de ese proyecto con una TEA de 0,21. (Caso 3 rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme y períodos de tasa uniformes).

Solución
Se trae al presente cada serie de rentas uniformes por separado.

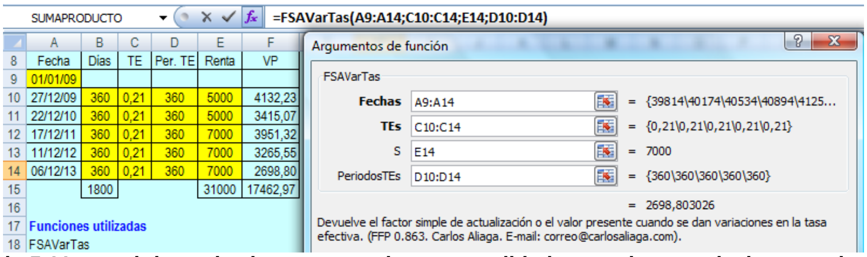


Figura 5.21 Modelo 5.11 que obtiene el valor presente de una anualidad general con variaciones en las rentas. Utiliza la FFP FSAVarTas.

$$P = R_1\left[\frac{(1+i)^2-1}{i(1+i)^2}\right] + R_2\left[\frac{(1+i)^3-1}{i(1+i)^3}\right](1+i)^{-2}$$

$$P = 5\,000\left[\frac{1{,}21^2-1}{0{,}21\times 1{,}21^2}\right] + 7\,000\left[\frac{1{,}21^3-1}{0{,}21\times 1{,}21^3}\right](1{,}21^{-2})$$

$$P = 5\,000 \times 1{,}509459736 + 7\,000 \times 2{,}073933666 \times 0{,}683013455 = 17\,462{,}97$$

12. Calcule el valor presente de una anualidad cuya primera renta trimestral vencida es 2 000 um y luego se incrementa en 100 um hasta la quinta renta trimestral. Utilice una TET de 0,05. (Caso 4 rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniformes; las rentas varían de acuerdo con una ley).

Solución
Se trae al presente cada renta por separado.

$$P = \frac{2\,000}{1{,}05^1} + \frac{2\,100}{1{,}05^2} + \frac{2\,200}{1{,}05^3} + \frac{2\,300}{1{,}05^4} + \frac{2\,400}{1{,}05^5} = 9\,482{,}65$$

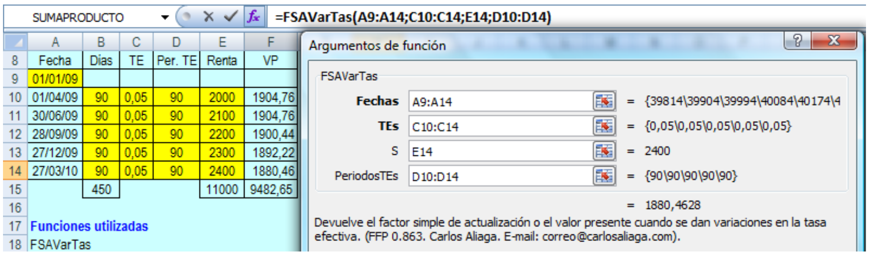
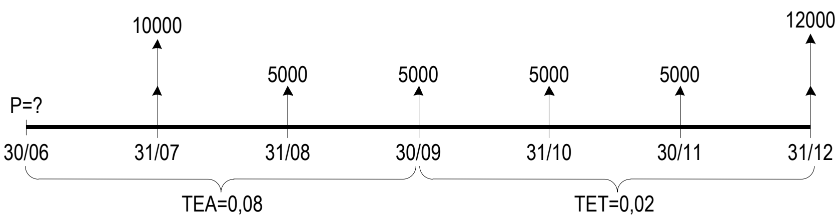


Figura 5.22 Modelo 5.12 que obtiene el valor presente de una anualidad general con variaciones en las rentas. Utiliza la FFP FSAVarTas.

13. El 30 de junio la compañía Progreso S.A reprogramó su presupuesto de remuneraciones al personal, el que requería 5 000 um mensuales hasta el 31 de diciembre del mismo año. Adicionalmente a esos importes, el 31 de julio se necesitará 5 000 um y el 31 de diciembre 7 000 um respectivamente, para pagos de gratificación y horas extras. Si la empresa puede percibir por sus depósitos en un banco, una TEA de 0,08 hasta el 30 de setiembre y luego una TET de 0,02, ¿qué importe colocado el 30 de junio le permitirá retirar a fin de cada mes, los importes de las planillas que se devengarán mensualmente? El primer pago del personal es el 31 de julio. (Caso 5 rentas variables, períodos de renta variables, tasa de interés variable y períodos de tasa variables).

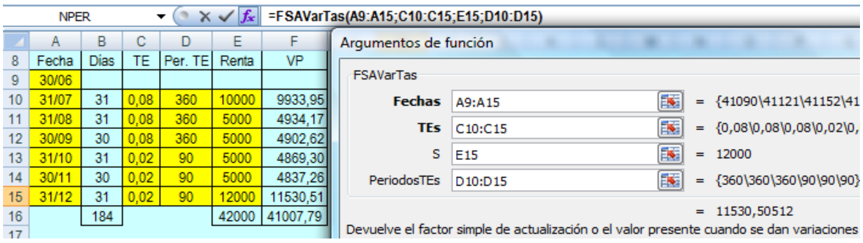
Solución
Dado que los importes de los flujos de caja y los plazos de renta son variables, puede hallarse el valor presente con el FSA para cada uno de los flujos de caja que se hallan a fin de cada mes.



$$P = \frac{10\,000}{1{,}08^{31/360}} + \frac{5\,000}{1{,}08^{62/360}} + \frac{5\,000}{1{,}08^{92/360}} + \frac{5\,000}{1{,}08^{92/360} \times 1{,}02^{31/90}} +$$

$$\frac{5\,000}{1{,}08^{92/360} \times 1{,}02^{61/90}} + \frac{12\,000}{1{,}08^{92/360} \times 1{,}02^{92/90}}$$

$$P = 9\,933{,}95 + 4\,934{,}17 + 4\,902{,}62 + 4\,869{,}30 + 4\,837{,}26 + 11\,530{,}51 = 41\,007{,}79$$



NPER =FSAVarTas(A9:A15;C10:C15;E15;D10:D15)

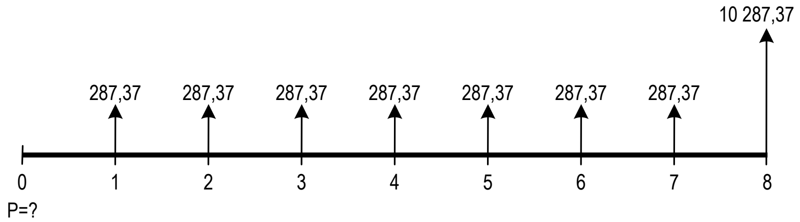
	A	B	C	D	E	F
8	Fecha	Dias	TE	Per. TE	Renta	VP
9	30/06					
10	31/07	31	0,08	360	10000	9933,95
11	31/08	31	0,08	360	5000	4934,17
12	30/09	30	0,08	360	5000	4902,62
13	31/10	31	0,02	90	5000	4869,30
14	30/11	30	0,02	90	5000	4837,26
15	31/12	31	0,02	90	12000	11530,51
16		184			42000	41007,79

Argumentos de función
FSAVarTas
Fechas A9:A15 = {41090\41121\41152\41
TEs C10:C15 = {0,08\0,08\0,08\0,02\0,
S E15 = 12000
PeriodosTEs D10:D15 = {360\360\360\90\90\90}
= 11530,50512
Devuelve el factor simple de actualización o el valor presente cuando se dan variaciones

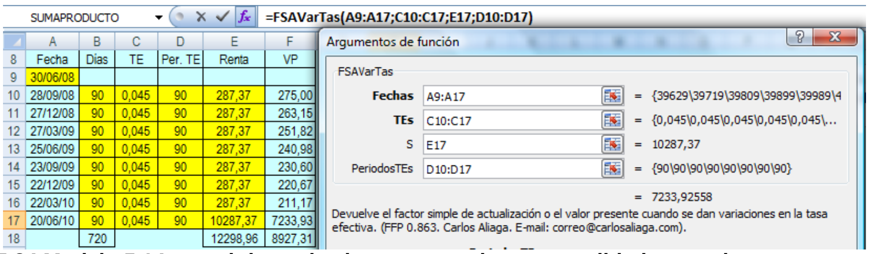
Figura 5.23 Modelo 5.13 que obtiene el valor presente de una anualidad general con variaciones en las rentas, períodos de renta variables, tasa de interés variable y períodos de tasa variables.

14. Calcule el precio por pagar de un bono con valor nominal de 10 000 um redimible dentro de dos años, el cual devenga una TEA de 0,12 y cuyos intereses se pagan cada 90 días. El inversionista que comprará los bonos tiene un costo de oportunidad que es una TET de 0,045.

Solución
El interés trimestral generado por el bono es: $287{,}37 = 10\,000\left[1{,}12^{90/360} - 1\right]$ y el diagrama del flujo de caja es el siguiente.



$$P = 287{,}37\left[\frac{1{,}045^7 - 1}{0{,}045 \times 1{,}045^7}\right] + 10\,287{,}37\left[\frac{1}{1{,}045^8}\right] = 1\,693{,}39 + 7\,233{,}93 = 8\,927{,}31$$



SUMAPRODUCTO =FSAVarTas(A9:A17;C10:C17;E17;D10:D17)

	A	B	C	D	E	F
8	Fecha	Dias	TE	Per. TE	Renta	VP
9	30/06/08					
10	28/09/08	90	0,045	90	287,37	275,00
11	27/12/08	90	0,045	90	287,37	263,15
12	27/03/09	90	0,045	90	287,37	251,82
13	25/06/09	90	0,045	90	287,37	240,98
14	23/09/09	90	0,045	90	287,37	230,60
15	22/12/09	90	0,045	90	287,37	220,67
16	22/03/10	90	0,045	90	287,37	211,17
17	20/06/10	90	0,045	90	10287,37	7233,93
18		720			12298,96	8927,31

Argumentos de función
FSAVarTas
Fechas A9:A17 = {39629\39719\39809\39899\39989\4
TEs C10:C17 = {0,045\0,045\0,045\0,045\0,045\...
S E17 = 10287,37
PeriodosTEs D10:D17 = {90\90\90\90\90\90\90\90}
= 7233,92558
Devuelve el factor simple de actualización o el valor presente cuando se dan variaciones en la tasa efectiva. (FFP 0.863. Carlos Aliaga. E-mail: correo@carlosaliaga.com).

Figura 5.24 Modelo 5.14 que obtiene el valor presente de una anualidad general con rentas variables.

Rentas de una anualidad general

15. Un préstamo de 15 000 um que devenga una TEM de 0,02 se amortiza con cuotas uniformes trimestrales vencidas en el plazo de dos años. Calcule el importe de la cuota uniforme trimestral. (Caso 1 rentas uniformes, períodos de rentas uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniforme, pero el período de renta no coincide con el período de tasa; existen varios períodos de tasa por renta).

Solución
Con los datos P=15 000; TET=0,061208; n=8; se calcula R.

$TET = (1 + TEM)^3 - 1$ $\qquad$ $TET = 1{,}02^3 - 1 = 0{,}061208$

$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$ $\qquad$ $R = 15\,000\left[\frac{0{,}061208 \times 1{,}061208^8}{1{,}061208^8 - 1}\right]$

$$R = 15\,000 \times 0{,}161806706 = 2\,427{,}10$$

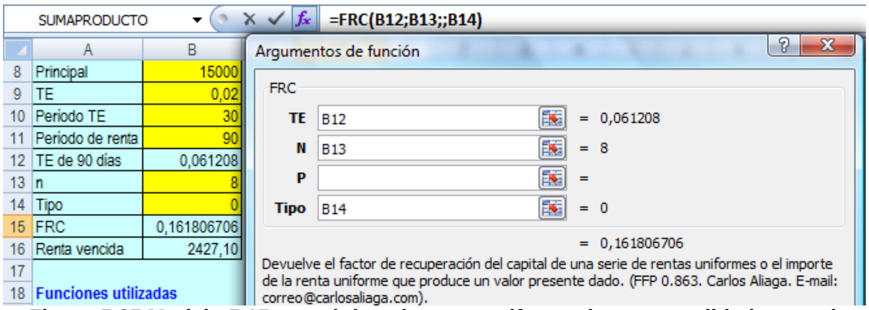


Figura 5.25 Modelo 5.15 que obtiene la renta uniforme de una anualidad general.

16. Un préstamo de 50 000 um que devenga una TEA de 0,16 se amortiza con cuotas uniformes bimestrales vencidas en el plazo de un año. Calcule el importe de la cuota uniforme bimestral vencida. (Caso 2. Rentas uniformes, períodos de rentas uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniforme, pero el período de renta no coincide con el período de tasa; existen varias rentas por periodo de tasa).

Solución
Con los datos P=50 000; TEB=0,025045157; n=6; se calcula R.

$TEB = (1 + TEA)^{60/360} - 1 \qquad TEB = 1{,}16^{2/12} - 1 = 0{,}025045157$

$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad R = 50\,000\left[\frac{0{,}025045157 \times 1{,}025045157^6}{1{,}025045157^6 - 1}\right]$

$R = 50\,000 \times 0{,}18157739 = 9\,078{,}87$

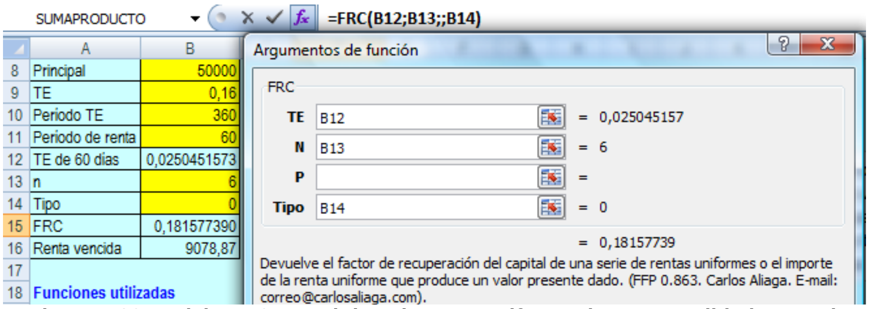


Figura 5.26 Modelo 5.16 que obtiene la renta uniforme de una anualidad general.

17. Un préstamo que devenga una TET de 0,04, se amortizará en el plazo de 3 años con cuotas vencidas que se pagarán cada 90 días. Las primeras 9 cuotas son de 108 946,26 um y las 3 últimas son de 200 000 um. Si se plantea la alternativa de cancelar el préstamo con 12 cuotas uniformes trimestrales, ¿cuánto será el importe de la cuota uniforme? (Caso 3 rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme y períodos de tasa uniformes).

Solución
Para convertir la anualidad general en una anualidad simple se traen todas las rentas al momento cero, y luego este stock de efectivo se convierte en una renta uniforme.

Cálculo del valor presente

$P = 108\,946{,}26\left[\frac{1{,}04^9 - 1}{0{,}04 \times 1{,}04^9}\right] + 200\,000\left[\frac{1{,}04^3 - 1}{0{,}04 \times 1{,}04^3}\right]\left[\frac{1}{1{,}04^9}\right]$

$P = 108\,946{,}26 \times 7{,}435331611 + 200\,000 \times 2{,}775091033 \times 0{,}702586735$

$P = 810\,051{,}57 + 389\,948{,}43 = 1\,200\,000$

Cálculo de la renta uniforme

$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad R = 1\,200\,000\left[\frac{0{,}04 \times 1{,}04^{12}}{1{,}04^{12} - 1}\right]$

$$R = 1\,200\,000 \times 0{,}106552172 = 127\,862{,}61$$

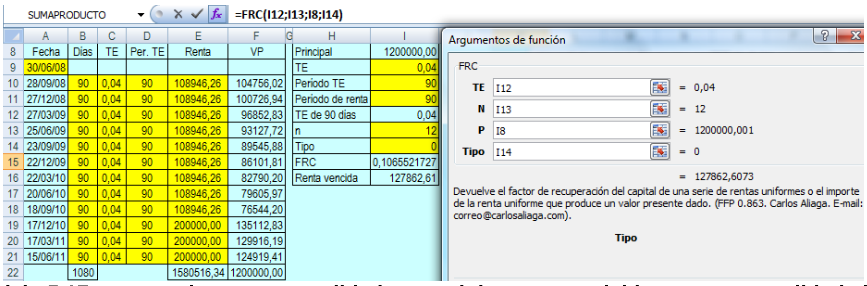


Figura 5.27 Modelo 5.17 que convierte una anualidad general de rentas variables en una anualidad simple de rentas uniformes.

18. Un préstamo que devenga una TET de 0,03, debe cancelarse en el plazo de año y medio con cuotas trimestrales vencidas que se incrementan en 100 um cada medio año, es decir en las cuotas 3 y 5. Si se ofrece como alternativa cancelar el préstamo a la misma tasa, con cuotas uniformes trimestrales, ¿cuánto será el importe de esa cuota uniforme? (Caso 4 rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniformes; las rentas varían de acuerdo con una ley).

Solución

Para convertir la anualidad general en una anualidad simple se traen todas las rentas al momento cero, y luego este stock de efectivo se convierte en rentas uniformes.

$$P = \frac{5\,000}{1{,}03^{1}} + \frac{5\,000}{1{,}03^{2}} + \frac{5\,100}{1{,}03^{3}} + \frac{5\,100}{1{,}03^{4}} + \frac{5\,200}{1{,}03^{5}} + \frac{5\,200}{1{,}03^{6}}$$

$$P = 4\,854{,}37 + 4\,712{,}98 + 4\,667{,}22 + 4\,531{,}28 + 4\,485{,}57 + 4\,354{,}92$$

$$P = 27\,606{,}34$$

$$R = P\left[\frac{i(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1}\right] \qquad R = 27\,606{,}34\left[\frac{0{,}03 \times 1{,}03^{6}}{1{,}03^{6}-1}\right]$$

$$P = 27\,606{,}34 \times 0{,}1845975 = 5\,096{,}06$$

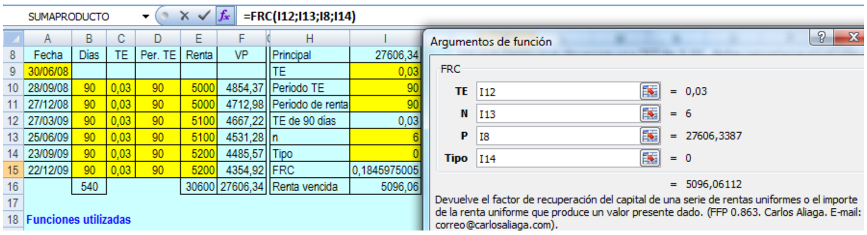
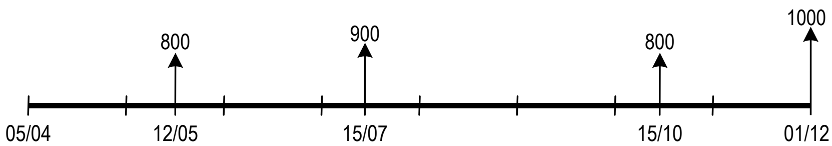


Figura 5.28 Modelo 5.18 que convierte una anualidad general de rentas variables periódicamente, en una anualidad simple de rentas uniformes.

19. La compañía Everest tiene con el Banco Intersur los siguientes compromisos de pago:



Everest solicitó la sustitución de esas deudas por cuotas uniformes con vencimiento cada 30 días a partir del 5 de abril. Si el Banco Intersur aprueba esta sustitución de deudas con una TEM de 0,02, calcule el importe de las cuotas uniformes equivalentes (Caso 5 rentas variables, períodos de renta variables, tasa de interés variable y períodos de tasa variables).

Solución

Se obtiene el valor presente de la anualidad general y luego ese stock de efectivo se transforma en 8 flujos uniformes mensuales con el FRC, cada uno de los cuales vence cada 30 días, a partir del 5 de abril.

$$R = \left[\frac{800}{1{,}02^{37/30}} + \frac{900}{1{,}02^{101/30}} + \frac{800}{1{,}02^{193/30}} + \frac{1\,000}{1{,}02^{240/30}}\right]\left[\frac{0{,}02 \times 1{,}02^{8}}{1{,}02^{8} - 1}\right]$$

$$R = [780{,}7 + 841{,}95 + 704{,}31 + 853{,}49]0{,}1365097991$$

$$R = 3\,180{,}45 \times 0{,}1365097991 = 434{,}16$$

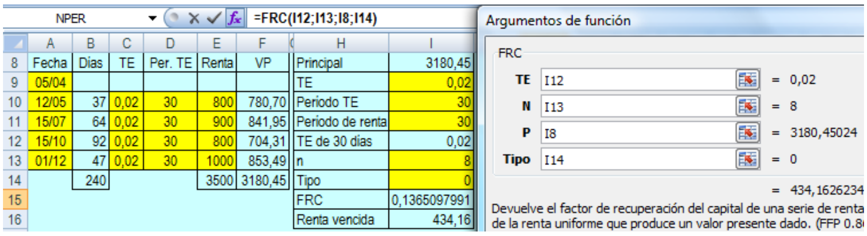


Figura 5.29 Modelo 5.19 que convierte una anualidad general de rentas variables periódicamente, en una anualidad simple de rentas uniformes.

Factor de distribución en una anualidad general

20. Una deuda debe cancelarse con pagos trimestrales vencidos de 4 000 um. Remplace esta serie de pagos por otra equivalente con pagos uniformes mensuales vencidos. Utilice una TEA de 0,18 para convertir estas rentas equivalentes.

Solución

La anualidad general con rentas trimestrales y tasa anual se transforma en anualidad simple al convertir la TEA en TEM, y utilizar el FDFA como factor de distribución rentas vencidas.

$$TEM = (1 + TEA)^{30/360} - 1 \qquad TEM = 1{,}18^{30/360} - 1 = 0{,}01388843$$

$$R = S\left[\frac{i}{(1+i)^{n} - 1}\right] \qquad X = 4\,000\left[\frac{0{,}01388843}{1{,}01388843^{3} - 1}\right]$$

$$X = 4\,000 \times 0{,}328746424 = 1\,314{,}99$$

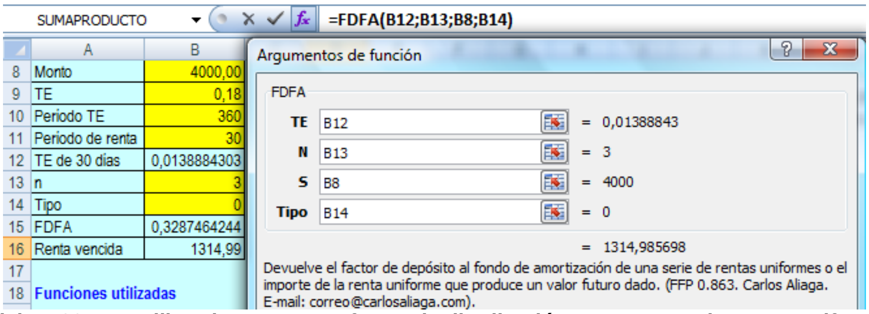


Figura 5.30 Modelo 5.20 que utiliza el FDFA como factor de distribución, para convertir rentas uniformes vencidas en otras rentas equivalentes vencidas de menor período.

21. Un préstamo que se amortiza con cuotas uniformes semestrales anticipadas de 8 000 um, puede cambiarse para amortizarse con cuotas uniformes mensuales vencidas. Calcule el importe de esas cuotas uniformes mensuales equivalentes con una TES (semestral) de 0,07.

Solución

La anualidad general con rentas anticipadas se transforma en una anualidad simple de rentas vencidas al convertir la TES en TEM, y utilizar el FRC como factor de distribución rentas anticipadas.

$$TEM = (1 + TES)^{30/180} - 1 \qquad TEM = 1{,}07^{30/180} - 1 = 0{,}01134026$$

$$R = P\left[\frac{i(1+i)^{n}}{(1+i)^{n} - 1}\right] \qquad X = 8\,000\left[\frac{0{,}01134026 \times 1{,}01134026^{6}}{1{,}01134026^{6} - 1}\right]$$

$$X = 8\,000 \times 0{,}173343976 = 1\,386{,}75$$

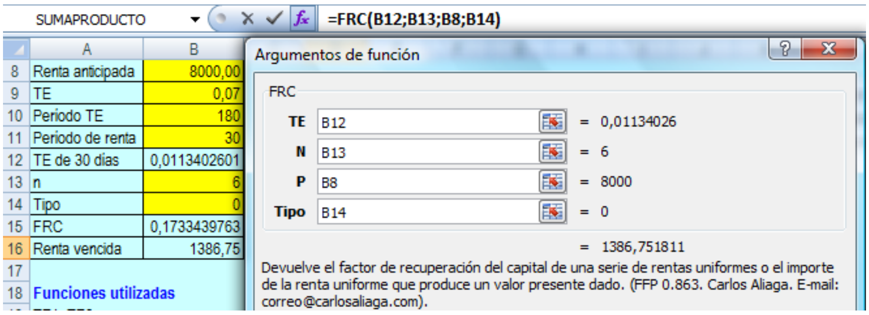


Figura 5.31 Modelo 5.21 que utiliza el FRC como factor de distribución, para convertir rentas uniformes anticipadas de un período en otras rentas equivalentes vencidas de menor período.

Factor de agrupamiento en una anualidad general

22. Una deuda se cancela con cuotas uniformes quincenales vencidas de 2 000 um; esta deuda puede cancelarse con cuotas uniformes trimestrales vencidas equivalentes. Con una TET de 0,05 calcule el importe de esa cuota uniforme.

Solución

La anualidad general con rentas vencidas se transforma en una anualidad simple de rentas vencidas de menor período, al utilizar el FCS como factor de agrupamiento de rentas vencidas y una TEQ.

$TEQ = (1 + TET)^{15/90} - 1 \qquad TEQ = 1{,}05^{15/90} - 1 = 0{,}008164846$

$S = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \qquad X = 2\,000\left[\frac{1{,}008164846^6 - 1}{0{,}008164846}\right]$

$X = 2\,000 \times 6{,}123814178 = 12\,247{,}63$

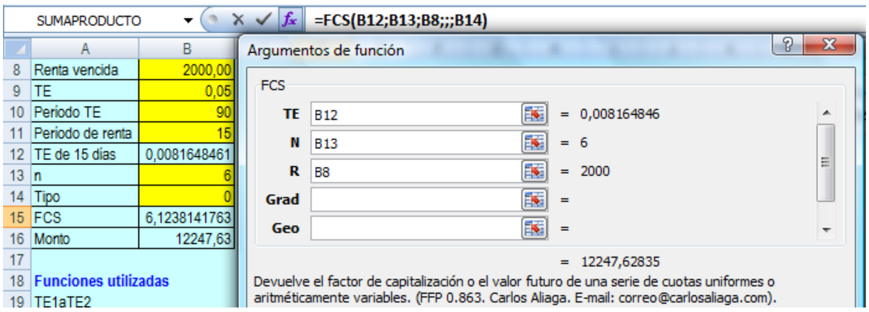


Figura 5.32 Modelo 5.22 que utiliza el FCS como factor de agrupamiento, para convertir rentas uniformes vencidas de un período en otras rentas equivalentes vencidas de mayor período.

23. Una deuda que se amortiza con cuotas uniformes mensuales vencidas de 1 000 um, puede cancelarse con cuotas uniformes trimestrales anticipadas equivalentes. Con una TET de 0,04 calcule el importe de esa cuota uniforme anticipada.

Solución

La anualidad general con rentas vencidas se transforma en una anualidad simple de rentas anticipadas de mayor período, al utilizar el FAS como factor de agrupamiento de rentas vencidas y una TEM.

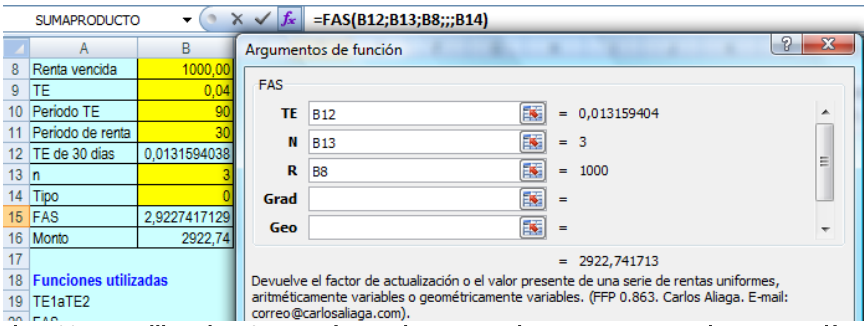


Figura 5.33 Modelo 5.23 que utiliza el FAS como factor de agrupamiento, para convertir rentas uniformes vencidas de un período en otras rentas equivalentes anticipadas de mayor período.

$TEM = (1+TET)^{30/90} - 1$ $\quad TEQ = 1{,}04^{30/90} - 1 = 0{,}013159404$

$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]$ $\quad X = 1\,000\left[\frac{1{,}013159404^3 - 1}{0{,}013159404 \times 0{,}013159404^3}\right]$

$X = 1\,000 \times 2{,}922741713 = 2\,922{,}74$

Cálculo de i (TIR) en una anualidad general

24. Un proyecto con una vida útil de 656 días que requiere una inversión de 35 000 um, puede generar los flujos de caja en los días que se muestran en la siguiente tabla. Calcule la tasa de rentabilidad o tasa interna de retorno de 360 días, de ese proyecto.

Días	0	66	138	291	472	656
Rentas	-35 000	2 457,86	8 000	10 000	12 000	12 000

Solución
El valor de i se obtiene a partir de la siguiente ecuación de equivalencia financiera.

$$35\,000 = \frac{2\,457{,}86}{(1+i)^{66/360}} + \frac{8\,000}{(1+i)^{138/360}} + \frac{10\,000}{(1+i)^{291/360}} + \frac{12\,000}{(1+i)^{472/360}} + \frac{12\,000}{(1+i)^{656/360}}$$

La ecuación anterior no tiene solución algebraica, por lo tanto con el método de "prueba y error" se asignarán valores a i de modo que el segundo miembro de la ecuación sea 35 000 um.

i	Valor presente
0,249	35 029,07
0,251	34 970,99

En el cuadro anterior se observa que la tasa i es mayor que 0,249 pero menor que 0,251; por lo tanto se interpolará linealmente entre estos dos valores para hallar su valor aproximado.

Al hacer:

$x_1 = 0{,}249 \qquad y_1 = 35\,029{,}07$

$x = \ ? \qquad y = 35\,000{,}00$

$x_2 = 0{,}251 \qquad y_2 = 34\,970{,}99$

Y al aplicar la fórmula (2.8) se tiene:

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}(x_2 - x_1)$$

$$x = 0{,}249 + \frac{35\,000{,}00 - 35\,029{,}07}{34\,970{,}99 - 35\,029{,}07}(0{,}251 - 0{,}249)$$

$$x = 0{,}25$$

La TEA aproximada linealmente al verdadero valor de i es 0,25.

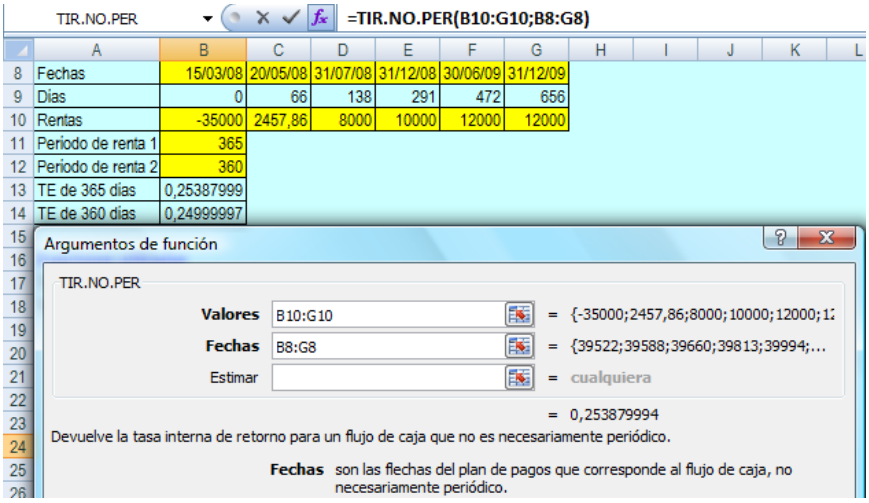


Figura 5.34 Modelo 5.24 que utiliza la función TIR.NO.PER para calcular la tasa interna de retorno de 365 días cuando los flujos de caja son no uniformes.

Preguntas de autoevaluación

1. ¿Qué es una anualidad general? Ponga cinco ejemplos de anualidades generales.

2. ¿Qué casos pueden presentarse en una anualidad general?

3. Si en una anualidad general todos los períodos de renta son iguales y sólo el período de tasa es diferente de los períodos de renta, ¿cómo se convierte esa anualidad general en una anualidad simple? Enuncie un problema como ejemplo, y luego resuelva ese problema.

4. ¿Qué son los factores múltiples? Enuncie un problema de anualidad general que se resuelve con el uso de factores múltiples.

5. Enuncie y resuelva un problema del monto de una anualidad general. Identifique las características del caso a que se refiere el problema enunciado.

6. Enuncie y resuelva un problema del valor presente de una anualidad general. Identifique el caso a que se refiere el problema enunciado.

7. Enuncie y resuelva un problema de rentas de una anualidad general. Identifique las características del caso a que se refiere el problema enunciado.

8. ¿Qué es un factor de distribución? ¿En qué casos se utiliza un factor de distribución, y cuáles son esos factores financieros?

9. ¿Qué es un factor de agrupamiento? ¿En qué casos se utiliza un factor de agrupamiento, y cuáles son esos factores financieros?

10. ¿Existe una fórmula específica para calcular el valor de n en una anualidad general, donde el período de tasa es diferente de los períodos de renta, y a su vez las rentas son diferentes? Fundamente su respuesta.

11. ¿Cómo se calcula el valor de i en una anualidad general?

Problemas propuestos

Monto de una anualidad general

1. Calcule el monto que se capitalizará al final del sexto año con rentas uniformes vencidas de 1 000 um que se depositarán anualmente en un banco; estos depósitos devengarán una TNA de 0,12 con capitalización trimestral ¿Cuánto es el interés total devengado en esta operación? (Caso 1 varios períodos de tasa por período de renta).

2. Una persona se compromete depositar a fin de cada quincena durante 6 meses, un importe de 500 um en un banco que remunera esos ahorros con una TEA de 0,08. ¿Cuánto acumulará al término de dicho plazo? ¿Cuánto es el interés total devengado en esta operación? (Caso 2 varias rentas por período de tasa).

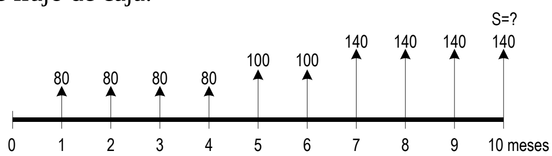
3. En el plazo de 90 días se efectuaron depósitos de ahorros de 200 um cada 6 días, por los cuales se percibe una TNA de 0,12 capitalizable mensualmente. ¿Cuánto se acumuló en ese intervalo de tiempo? ¿Cuánto es el interés total devengado en esta operación? ¿Cuánto es el interés generado por el primer depósito durante el primer período de la anualidad? (Caso 2 varias rentas por período de tasa).

4. ¿Cuánto se capitalizará en 8 meses al efectuar depósitos mensuales vencidos de 400 um, en una institución bancaria que los remunera con una TNA de 0,24 capitalizable semestralmente? ¿Cuánto es el interés total devengado en esta operación? ¿Cuánto es el interés generado por el primer depósito durante el primer período de la anualidad? (Caso 2 varias rentas por período de tasa).

5. ¿Cuánto se capitalizará con imposiciones trimestrales uniformes de 500 um durante 9 meses si se colocan en un banco que remunera ésos depósitos con una TNM de 0,01 capitalizable bimestralmente? ¿Cuánto es el interés total devengado en esta operación? ¿Cuánto es el interés generado por el primer depósito durante el primer período de la anualidad? (Caso 2 varias rentas por período de tasa).

6. Calcule el importe de los intereses acumulados durante 8 meses con imposiciones uniformes bimestrales de 1 000 um colocadas en una financiera a una TNA de 0,18 capitalizable trimestralmente. Formule la tabla de acumulación del monto. (Caso 2 varias rentas por período de tasa).

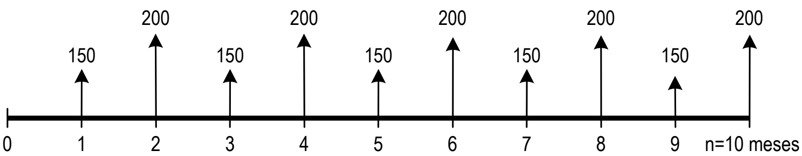
7. En el siguiente diagrama de flujo de caja:



   Calcule el valor futuro al final del décimo mes con una TEM de 0,02. Aplique 3 ecuaciones equivalentes diferentes que produzcan el mismo resultado. (Caso 3 rentas variables periódicamente).

8. Dentro de 12 meses la compañía Electrofast remplazará una máquina cuyo precio será 9 000 um en dicha fecha; para tal fin puede generar flujos de flujos de caja mensuales vencidos, los mismos que depositará en un banco (500 um del primer al cuarto mes y 800 um del quinto al noveno mes). ¿Cuánto es el importe uniforme que debe depositar en los tres meses restantes para acumular dicho monto, si la operación devenga una TEM de 0,02? Prepare la tabla de acumulación de monto (Caso 3 rentas variables periódicamente).

9. Con una TET de 0,05 calcule el valor futuro al final del décimo mes con los datos que se presentan en el siguiente diagrama. Prepare la tabla de acumulación de monto. (Caso 3 rentas variables periódicamente).



10. En un plazo de 2 años, se depositan cada fin de trimestre cuotas que devengan una TET de 0,05. La primera cuota tiene un importe de 500 um y las siguientes se incrementan en 10 um con relación a la anterior; así la última cuota trimestral tiene un importe de 570 um. Calcule el monto de ese fondo al final del segundo año. (Caso 4 rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniformes, las rentas varían de acuerdo con una ley).

11. Durante un año se depositan cuotas mensuales vencidas en un fondo que devenga una TEM de 0,01. En el primer semestre las cuotas son de 1 000 um y durante el segundo semestre las cuotas son de 1 200 um. Calcule el monto de ese fondo al final del plazo anual. Formule la tabla de acumulación de monto. (Caso 4 rentas variables periódicamente, períodos de renta uniformes, tasa de interés uniforme, períodos de tasa uniformes, las rentas varían de acuerdo con una ley).

12. En un período de 120 días se efectúan los depósitos cuyos importes y tasas se muestran en la siguiente tabla. Calcule el monto de esa operación en su fecha de término el 18 de agosto. Formule la tabla de acumulación del monto. (Caso 5 rentas variables, períodos de renta variables, tasa de interés variable y períodos de tasa variables).

Fecha	20/04	20/05	19/06	19/07	18/08
Tasa	TEM=0,01		TEA=0,12		
Rentas	2 000	3 000	3 000	4 000	Término

13. Calcule el monto de la anualidad general que se muestra en la siguiente tabla. Formule la tabla de acumulación del monto. (Caso 5 rentas variables, períodos de renta variables, tasa de interés variable y períodos de tasa variables).

Fecha	30/04	30/05	09/06	29/07	17/09	27/10
Tasa	TEA=0,1			TEM=0,01		
Rentas	1 000	1 500	1 500		2 000	Término

Valor presente de una anualidad general

14. Calcule el valor presente de una anualidad que tiene un horizonte temporal de dos años, y cuotas uniformes trimestrales vencidas de 5 000 um; utilice una TEM de 0,01. ¿Cuánto es el valor presente de la última cuota? (Caso 1 varios períodos de tasa por período de renta).

15. Un proyecto de inversión puede generar flujos de caja anuales de 10 000 um durante 5 años. Con una TET de 0,04 calcule el valor presente de esos ingresos. ¿Cuánto es el valor presente del primer flujo de caja? (Caso 1 varios períodos de tasa por período de renta).

16. En la feria del hogar, una máquina textil se oferta con un pago de 2 000 um de cuota inicial y 24 cuotas mensuales vencidas de 250 um cada una. ¿Cuánto es el precio de contado equivalente, si el financiamiento devenga una TEA de 0,2? (Caso 2 varias rentas por período de tasa).

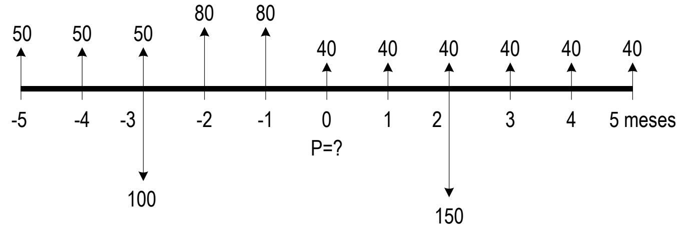
17. Una persona debe pagar por el saldo de un préstamo cuotas diarias de 10 um Si el acreedor accede descontar las cuotas con una TNA de 0,24 capitalizable trimestralmente, y todavía restan pagar 35 cuotas, ¿cuánto es el importe para cancelar el préstamo en este momento? (Caso 2 varias rentas por período de tasa).

18. Calcule el valor presente de una anualidad de 2 años, compuesta de cuotas uniformes vencidas bimestrales de 2 000 um. Aplique una TNA de 0,24 con capitalización trimestral. (Caso 2 varias rentas por período de tasa).

19. Con una TET de 0,05 calcule el valor presente de una anualidad de 10 rentas trimestrales vencidas, de las cuales las 5 primeras son de 2 000 um, las 3 siguientes son de 3 000 um y las 2 últimas son de 3 500 um. ¿Cuánto es el valor presente de la última renta? (Caso 3 rentas variables periódicamente).

20. Con una TEB de 0,04 calcule el valor presente de una anualidad de 10 rentas bimestrales vencidas, de las cuales las 4 primeras son de 6 000 um y las 6 últimas son de 4 000 um. ¿Cuánto es el interés de la anualidad general?

21. Con una TEM de 0,05 calcule el valor presente (momento 0) de los flujos de caja que se presentan en el siguiente diagrama de flujo de caja. (Caso 3 rentas variables periódicamente).

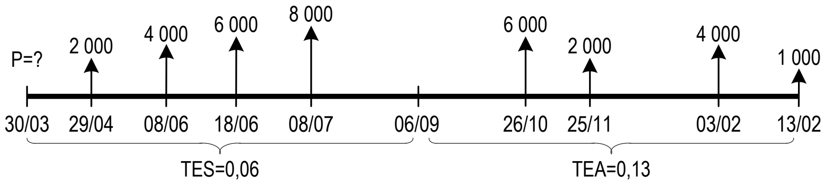


22. Calcule el valor presente de los costos de una empresa durante un período de 9 meses; en este plazo los costos mensuales del primer mes de 5 000 um disminuirán en 50 um cada mes. Utilice TEM de 0,01. (Caso 4 rentas varían de acuerdo con una ley).

23. Calcule el valor presente de los ingresos de una empresa durante un período de 8 meses; en este plazo los ingresos mensuales del primer mes de 8 000 um aumentarán 100 um cada mes. Utilice TEM de 0,01. (Caso 4 rentas varían de acuerdo con una ley).

24. Un proyecto de inversión puede generar flujos de caja semestrales durante cada uno de los cuatro años de vida útil. El primer flujo de caja semestral se estima en 5 000 um, y luego se incrementarán en 500 um cada año; esto significa que el último flujo de caja será 7 500 um. Si el costo de oportunidad del capital es una TES (semestral) de 0,06; calcule el valor presente de los flujos de caja de ese proyecto. (Caso 4 rentas varían de acuerdo con una ley).

25. Calcule el valor presente de la anualidad de 320 días, cuyos datos se muestran en el siguiente diagrama de tiempo valor. (Caso 5 rentas variables, períodos de renta variables, tasa de interés variable y períodos de tasa variables).



26. El día 20 de marzo una empresa debe pagar 6 deudas que vencerán en el transcurso de los próximos 300 días; realizará esta operación porque dichos importes serán descontados con unas tasas de interés convenientes para el deudor. Calcule el valor presente de esa operación con los datos que se presentan a continuación. (Caso 5 rentas variables, períodos de renta variables, tasa de interés variable y períodos de tasa variables).

Fecha	20/03	29/05	18/06	18/07	27/08	26/09	26/10	14/01
Tasa	TET=0,03					TEA=0,13		
Rentas		2 000	4 000	8 000	6 000		2 000	4 000

Rentas de una anualidad general

27. Calcule la cuota uniforme trimestral vencida que amortice una deuda de 5 000 um en año y medio. Utilice una TNT de 0,045 capitalizable semestralmente. ¿Cuánto es el importe del interés total generado por la deuda? (Caso 1 varios períodos de tasa por período de renta).

28. Una persona tiene en una cuenta de ahorros un saldo de 3 000 um del cual piensa retirar a inicios de cada mes durante 4 años y hasta extinguirlo una determinada renta uniforme. Calcule el importe de la renta, considere que el banco remunera a los ahorros con una tasa nominal bimestral de 0,02 capitalizable trimestralmente. ¿Cuánto es el importe del interés total generado por la cuenta de ahorros? (Caso 1 varios períodos de tasa por período de renta).

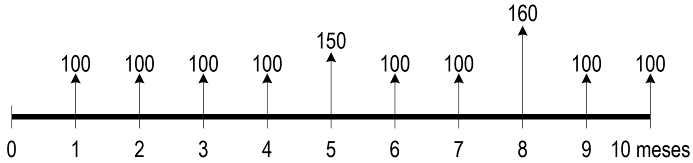
29. Un automóvil cuyo precio de contado es 8 000 um se vende con una cuota inicial de 3 000 um y sobre el saldo se carga una TEA de 0,18. ¿A cuánto asciende la cuota uniforme mensual vencida, si la diferencia se cancela en 24 cuotas uniformes? ¿Cuánto es el importe del interés total generado por la deuda? (Caso 2 varias rentas por período de tasa).

30. Una pareja de esposos planea adquirir dentro de 5 años una casa evaluada en 40 000 um (en esa fecha); si puede percibir por sus depósitos, colocados en un banco una TEA de 0,1; ¿cuánto será el importe equivalente vencido en el caso que los depósitos se coloquen: semestralmente; trimestralmente; mensualmente o diariamente, que le permita alternativamente acumular dicho fondo? (Caso 2 varias rentas por período de tasa).

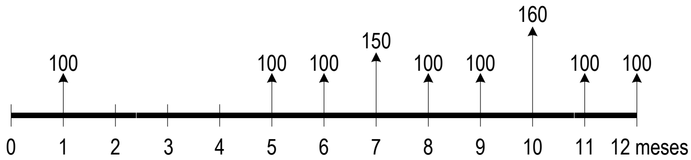
31. La compañía GBM colocó bonos por 1 000 000 um los que vencerán dentro de 5 años. ¿Qué importe uniforme de fin de trimestre debe ahorrar en ese lapso de tiempo, en un banco que remunera los depósitos con una TEA de 0,1, para acumular el monto necesario para redimir los bonos a su vencimiento? ¿Cuánto es el importe del interés total del financiamiento? (Caso 2 varias rentas por período de tasa).

32. La compañía Metales ha formulado su presupuesto de caja mensual anual y estimado los siguientes flujos de fin de mes: del primer al cuarto mes 500 um; del quinto al octavo mes no puede proyectar los flujos ya que introducirá un nuevo producto; del noveno al duodécimo mes 700 um. Si Metales puede ahorrar esos ingresos que devengan una TEM de 0,05 y necesita disponer al término de 12 meses un monto de 10 000 um, calcule el importe uniforme de los flujos de caja mensuales que no puede proyectar la compañía. (Caso 3 rentas variables periódicamente).

33. Con una TEM de 0,02 convierta la anualidad general que se muestra en el siguiente diagrama, en una anualidad equivalente de rentas uniformes bimestrales vencidas. (Caso 3 rentas variables periódicamente).



34. Con una TEM de 0,01, convierta la anualidad general de doce meses, que se muestra en el siguiente diagrama, en una anualidad equivalente de rentas uniformes trimestrales vencidas. (Caso 3 rentas variables periódicamente).



35. Los valores presentes de dos anualidades de rentas uniformes mensuales vencidas, la primera de 24 meses a una TEM de 0,05 y la segunda de 36 meses a una TEM de 0,06; suman 18 596,11 um. Los montos de ambas anualidades suman 117 547,69 um. Calcule el importe de la renta uniforme de cada anualidad. (Caso 3 rentas variables periódicamente).

36. Una préstamo de 10 000 um debe amortizarse con dos cuotas, la primera de un importe de 5 000 um la cual debe pagarse 30 días después de recibido el préstamo y la última cuota debe pagarse el día 170, fecha en la cual termina el plazo del préstamo. Calcule el importe de la segunda cuota, si la TEM es 0,02. Prepare la tabla de amortización del préstamo. (Caso 3 rentas variables periódicamente).

37. Un préstamo de 30 000 um que devenga una TEM de 0,01 debe cancelarse con cuatro cuotas, la primera de un importe de 5 000 um que debe pagarse 30 días después de recibido el préstamo y las dos últimas cuotas de 8 000 um deben pagarse los días 90 y 120 respectivamente, fecha de término del plazo del préstamo. Calcule el importe de la segunda cuota del día 60 y prepare la tabla de amortización. (Caso 3 rentas variables periódicamente).

38. Una deuda de 10 000 um se contrató para devolverse con 4 pagos bimestrales proporcionales a 2, 4, 6 y 8. Calcule el importe de cada pago con una TNA de 0,36 capitalizable mensualmente y prepare la tabla de amortización del préstamo. (Caso 3 rentas variables periódicamente).

39. Un ahorrista se propone acumular un monto de 10 000 um en un plazo de tres años, para lo cual decidió:

- Año 1: depositar en un banco 100 um al final de cada quincena.
- Año 2: efectuar un depósito de 1 000 um, a fin del mes 3 y otro depósito de 500 um a fin del mes 12.
- Año 3: depositar una renta uniforme cada fin de trimestre.

Calcule el importe de la renta uniforme del tercer año y los intereses que acumulará en los tres años. Los depósitos devengan una TEM de 0,01. (Caso 3 rentas variables periódicamente).

40. Un préstamo que devenga una TEM de 0,01 debe cancelarse en el plazo de medio año con cuotas mensuales de 2 000 um, que se incrementan en 100 um en la tercera y quinta cuota (con relación a la anterior).

Convierta esa anualidad de cuotas variables mensuales, en cuotas uniformes de trimestrales vencidas. (Caso 4 rentas varían de acuerdo con una ley).

41. Un préstamo que devenga una TEM de 0,01 debe cancelarse en el plazo de 8 meses con cuotas mensuales vencidas de 4 000 um que se incrementan en 100 um mensualmente. Calcule la cuota uniforme bimestral vencida equivalente de la anualidad original. (Caso 4 rentas varían de acuerdo con una ley).

42. En un plazo de 180 días que se inicia el 17 de marzo deben efectuarse los pagos cuyos importes, fechas de vencimiento, tasas y períodos de tasas, se muestran en la siguiente tabla. Convierta esa anualidad general, en una anualidad simple vencida con rentas uniformes mensuales. Tenga presente que la TEA de 0,15 cambió a una TET de 0,038 el 15 de junio. (Caso 5 rentas variables, períodos de renta variables, tasa de interés variable y períodos de tasa variables).

Fecha	17/03	26/04	06/05	15/06	15/07	04/08	13/09
Tasa	TEA=0,15			TET=0,038			
Rentas	4 000	4 100	4 200	4 291,27	4 400	4 500	4 565,36

43. En un plazo de 210 días que se inicia el 1 de abril deben efectuarse los pagos cuyos importes, fechas de vencimiento, tasas y períodos de tasas, se muestran en la siguiente tabla. Convierta esa anualidad general, en una anualidad simple vencida con rentas uniformes mensuales. Tenga presente que la TEM de 0,01 cambió a una TET de 0,03 el 30 de junio.

Fecha	01/04	11/05	31/05	30/06	09/08	28/09	28/10
Tasa	TEM=0,01			TET=0,03			
Rentas	5 000	5 000	5 000	5 320,90	6 000	6 000	6 000,06

Factores de distribución

44. ¿Qué ingreso uniforme de fin de mes es equivalente a 5 000 um de fin de cada trimestre, si se utiliza como tasa de evaluación una TEA de 0,15? Compruebe su respuesta con una tabla de acumulación del monto.

45. Con una TEM de 0,02, ¿qué pago uniforme efectuado a fin de cada quincena en el plazo de 90 días es equivalente a 4 000 um de fin de cada trimestre? Compruebe su respuesta con una tabla de acumulación del monto.

46. La cuota mensual vencida para la compra de un carro es 500 um. Si una persona decide efectuar en un banco depósitos uniformes vencidos cada tres días y percibe una TEA de 0,1, ¿cuánto es el importe del depósito que permita acumular dicha cuota mensual? Compruebe su respuesta con una tabla de acumulación del monto.

47. Con una TNA de 0,24 capitalizable trimestralmente, ¿cuánto debe ser la renta uniforme al final de cada mes para que sea equivalente a 3 000 um al inicio de cada semestre?

48. Con una TNA de 0,24 capitalizable trimestralmente, ¿cuánto debe ser la renta uniforme al inicio de cada mes para que sea equivalente a 3 000 um al inicio de cada semestre? Compruebe su respuesta con una tabla de valor actual de las rentas anticipadas.

Factores de agrupamiento

49. Sustituya una deuda que debe amortizarse con cuotas uniformes de 1 000 um cada fin de mes, por cuotas equivalentes uniformes de fin de trimestre. Utilice una TNA de 0,12 capitalizable semestralmente. Compruebe su respuesta con una tabla de acumulación del monto.

50. En el plazo de dos años una deuda que debe amortizarse con cuotas bimestrales vencidas de 400 um puede remplazarse con cuotas equivalentes anticipadas que se pagarán cada 8 meses. Calcule el importe de esa cuota anticipada con una TEM de 0,02.

Cálculo de n en una anualidad general

51. Una máquina importada tiene un costo de 15 000 um y se vende en 20 000,75 um con las siguientes condiciones: cuota inicial 12 000 um y el saldo de 8 000,75 um debe pagarse en cuotas de 1 000 um cada fin de mes. El crédito devenga una TEA de 0,2.
    a. ¿Cuántas cuotas uniformes deben pagarse para cancelar dicho préstamo? Si estas fuesen un número no

entero, en qué fecha debe pagarse la última renta (no entera), y cuánto es el importe por depositar en esa fecha.

b. Si el número de cuotas fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato superior y calcule el importe de la última cuota.

c. Si el número de cuotas fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato inferior y calcule el importe de la última cuota.

52. Un trabajador que acumuló en su fondo de pensiones 50 000 um, acuerda con su AFP recibir como pensión una renta mensual vencida de 1 983,01 um. ¿Por cuántos meses podrá disponer esa renta, si el fondo devenga una TEA de 0,08?
    a. Si el número de rentas fuese un número no entero, en qué fecha recibirá la última renta (no entera), y cuánto es el importe en esa fecha.
    b. Si el número de rentas fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato superior y calcule el importe de la última renta.
    c. Si el número de rentas fuese un número no entero, redondee n al entero inmediato inferior y calcule el importe de la última renta.

53. Un trabajador decidió aportar cada fin de mes a una AFP un importe mensual de 300 um durante los 5 años que le faltan para jubilarse, de modo que después de su jubilación le permita retirar mensualmente una renta igual a la de su aporte acumulado en ese lapso de tiempo. Dado que los capitales en la AFP devengan una TEA de 0,06, ¿durante cuántos meses podrá efectuar esos retiros hasta agotar su fondo? Si el importe del retiro fuese 602,2 um ¿durante cuántos meses podrá hacerlo?

54. ¿Con cuántos depósitos trimestrales vencidos de 400 um podrá acumularse un monto de 3 000 um, si el fondo devenga una TNA de 0,12 capitalizable cuatrimestralmente? Si el número de depósitos fuese un número no entero:
    a. ¿En qué fecha debe realizarse el último depósito (no entero), y cuánto es el importe por depositar en esa fecha?
    b. Redondee n al entero inmediato superior y calcule el importe del último depósito.
    c. Redondee n al entero inmediato inferior y calcule el importe del último depósito.

Cálculo de i en una anualidad general

55. Un préstamo de 1 000 000 um se otorga para amortizarse con 24 cuotas quincenales vencidas de 49 924,10 um. ¿Qué TNA se está cargando?

56. Una renta cuatrimestral vencida de 66 091,27 um colocada en un banco durante 3 años acumuló un monto de 700 000 um. ¿Qué TET se empleó en esa operación?

57. Una deuda de 48 777,37 um, debe cancelarse con dos pagos uniformes de 26 000 um cada uno, que vencerán dentro de 60 y 90 días respectivamente. Calcule la TEA (de 360 días) aplicada en esta operación.

Misceláneos

58. Una compañía compra al contado una máquina por 8 000 um de la que se espera tenga un valor de salvamento de 1 000 um (valor de desecho al final de su vida útil). La máquina requiere un mantenimiento preventivo cada tres años a un costo de 2 000 um. ¿Cuánto es el costo presente equivalente de la máquina (incluye la inversión), si tiene una vida útil de 10 años y el costo de oportunidad de la empresa es una TEA de 0,3?

59. Un trabajador mediante sus aportes de 100 um a una administradora de fondos de pensiones realizados, a fin de cada mes, durante 8 años, desea constituir un fondo que le permita percibir al final de ese período una renta uniforme cada fin de mes durante 10 años. Calcule el importe de esa renta con una TEA de 0,06.

60. En un periódico de la capital se publica el siguiente aviso: "Crédito inmediato, sin garante y hasta 19 meses para pagar". En sus ofertas incluye:

- Refrigeradora Faeda Génova 17p3, sistema No Frost, dispensador de agua. Paga la cuota inicial de 223 um el 31 de julio y 18 cuotas de 65 um que vencen el último día de cada mes (excepto el 31 diciembre del primer año, en esta fecha la cuota es 223 um).
- Cocina Faeda Aquarius: paga la cuota inicial de 95 um el 31 de julio y 18 cuotas de 28 um que vencen el último día de cada mes (excepto el 31 de diciembre del primer año, en esta fecha la cuota es 95 um.

a. ¿Cuánto es el precio de contado de ambos artículos?
b. ¿Cuánto serán las cuotas mensuales de ambos artículos, si el cliente decide pagar la cuota inicial el 31 de julio y la diferencia en 19 cuotas mensuales uniformes que vencen el último día de cada mes?
c. Si el cliente decide pagar el 31 de julio una cuota inicial de 250 um por la refrigeradora, y las dos primeras cuotas mensuales de 150 um cada una, ¿a cuánto ascenderán las 17 cuotas uniformes restantes?
d. Si el cliente decide pagar el 31 de julio una cuota inicial de 150 um por la cocina, ¿a cuánto ascenderán las 19 cuotas uniformes restantes?

Efectúe la evaluación con una TEA de 0,15 (360 días), considere que todos los pagos se realizan a fin de cada mes calendario (meses de 28, 30 o 31 días), el número total de pagos es 19, sin considerar la cuota inicial, y que los años son no bisiestos.

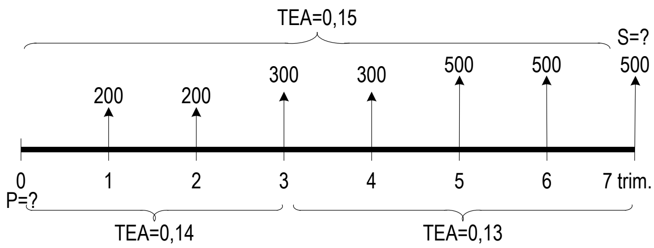
61. Calcule el valor presente (momento 0) de los flujos de caja mensuales vencidos, de los siguientes proyectos:

Proyecto	Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	TEM	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
	FC	100	100	100	100	100	200	200	200	200	200
B	TEM	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
	FC	100	100	100	100	200	200	200	200	300	300
C	TEM	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
	FC	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

62. Calcule el valor futuro (momento 10) de los flujos de caja mensuales vencidos, de los siguientes proyectos.

Proyecto	Mes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	TEM	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
	FC	100	100	100	100	100	200	200	200	200	200
B	TEM	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
	FC	100	100	100	100	200	200	200	200	300	300
C	TEM	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
	FC	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

63. En el diagrama de flujo de caja que se presenta a continuación:
a. Obtenga el valor futuro (momento 7) con una TEA de 0,15.
b. Halle el valor presente (momento 0) con una TEA de 0,14 vigente hasta el momento 3 y luego la TEA es 0,13 hasta el final del horizonte temporal.



64. Una persona deposita en un banco 500 um cada fin de trimestre durante un año. Por esos depósitos percibe una TEM de 0,015. Al cabo de dos años (contados desde el inicio del primer trimestre) cancela su cuenta. Calcule el monto de sus depósitos y formule la tabla de acumulación del monto.

Resumen del capítulo

Una anualidad general es una anualidad cierta en la cual los períodos de tasa y los períodos de renta *no son necesariamente del mismo plazo*, o los importes de las rentas que componen el horizonte temporal pueden ser uniformes o *variables*.

Los principales casos que se presentan en una anualidad general tienen que ver con los importes de las rentas, los períodos de rentas, la tasa de interés, los períodos de tasa de interés; si uno, algunos o todos estos elementos son variables, entonces la anualidad es general, se resuelve luego de plantear una ecuación de equivalencia financiera y obtener la incógnita requerida.

Existen diversos procedimientos y combinaciones de factores financieros que pueden utilizarse para solucionar un problema de anualidad general; no obstante, en la medida de lo posible se sugieren los siguientes pasos:

- Dibujar el diagrama de flujo de caja de las rentas, ubicar en éste todas sus variables y colocar una interrogante en la variable a obtener.

- Verificar que los períodos de renta y de tasa sean uniformes; si estos plazos no están referidos a una misma unidad de tiempo, se sugiere transformar el período de la tasa para que se corresponda con el período de renta.

- Si los flujos de caja no son uniformes, hay que tratar de formar rentas uniformes y descomponerlas de modo que forme en el horizonte temporal, anualidades simples, en la medida que sea posible.

- Establecer las ecuaciones de equivalencia financiera y resolverlas con los *factores múltiples*; estos son factores financieros que, combinados de acuerdo con los datos disponibles de un problema y se utilizan para plantear diferentes ecuaciones de equivalencia financiera.

En una anualidad general puede calcularse: el monto, el valor presente, las rentas y los valores de n e i.

Cuando las rentas son uniformes pero los plazos de renta y de tasa son diferentes se puede utilizar:

- El FDFA como factor de distribución aplicado a R para convertirlas en rentas vencidas equivalentes de importe X de menor plazo.

- El FRC como factor de distribución aplicado a R_a para convertirla en rentas vencidas equivalentes de importe X de menor plazo.

- El FCS como factor de agrupamiento aplicado a R para convertirlas en rentas vencidas equivalentes de importe X de mayor plazo.

- El FAS como factor de agrupamiento aplicado a R para convertirlas en rentas anticipadas de importe X de mayor plazo.

Capítulo 6

GRADIENTES

En este capítulo se estudian las anualidades cuyos importes de rentas varían: aritméticamente, geométricamente, o de acuerdo con una ley prestablecida.

Objetivos del capítulo

Al terminar este capítulo el lector estará capacitado para:

6.1 Definir un gradiente, clasificarlos, identificar los gradientes desfasados y descomponer una anualidad con gradiente uniforme, en cuotas bases y gradientes uniformes.

6.2 Calcular el valor presente de una anualidad de gradientes uniformes en una anualidad con rentas que varían en progresión aritmética.

6.3 Calcular el valor presente de una anualidad de gradientes uniformes desfasados, en una anualidad con rentas que varían en progresión aritmética.

6.4 Convertir una anualidad de gradientes aritméticos en una anualidad de rentas uniformes con el FRCG.

6.5 Calcular el valor futuro de una anualidad de gradientes uniformes convencionales, y de gradientes uniformes desfasados.

6.6 Calcular el valor presente de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando $g \neq (1+i)$ y cuando $g = (1+i)$. Calcular la cuota base de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica.

6.7 Calcular el valor futuro de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando $g \neq (1+i)$ y cuando $g = (1+i)$.

6.8 Calcular el valor presente y la cuota base de una anualidad con gradientes uniformes, variables aritméticamente cada m número de rentas.

6.9 Calcular la renta uniforme del primer subhorizonte de una anualidad cuyas rentas varían geométricamente cada m número de rentas.

6.10 Plantear modelos en Excel que resuelven problemas de gradientes.

Simbología

Los nuevos símbolos que se utilizan en el presente capítulo son:

FASG	El Factor de Actualización de la Serie de Gradientes uniformes.
FCSG	El Factor de Capitalización de la Serie de Gradientes uniformes.
FRCG	El Factor de Recuperación del Capital de Gradientes uniformes.
G	Gradiente uniforme.
g	Razón de variación geométrica.
P_G	Valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en progresión aritmética.
P_g	Valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica.
R	Cuota base.

Figura 6.1 Principales casos de gradientes.

6.1 Gradientes

En una anualidad vencida cuyos períodos de renta son uniformes, el período de tasa coincide con el período de renta y cuyas rentas consecutivas varían de acuerdo con una ley predeterminada, se denomina *gradiente* a la variación entre el importe de cualquier renta a partir de la segunda y la anterior.

En toda anualidad cuyas rentas experimentan cambios durante el horizonte temporal de acuerdo con una ley predeterminada, su primera renta se denomina *cuota base* la cual no involucra al gradiente.

Las rentas de una anualidad pueden:

- Variar en progresión aritmética; en este caso los gradientes G son uniformes.
- Variar en progresión geométrica, en este caso los gradientes son no uniformes, y su razón de variación es g.
- Tener gradientes positivos, cuando los importes de las rentas de la anualidad experimentan un incremento durante el horizonte temporal.
- Tener gradientes negativos, cuando los importes de las rentas de la anualidad experimentan un decremento durante el horizonte temporal.
- Variar de acuerdo con una ley específica predeterminada; por ejemplo, cuando las rentas mensuales varían anualmente.

Clasificación de los gradientes

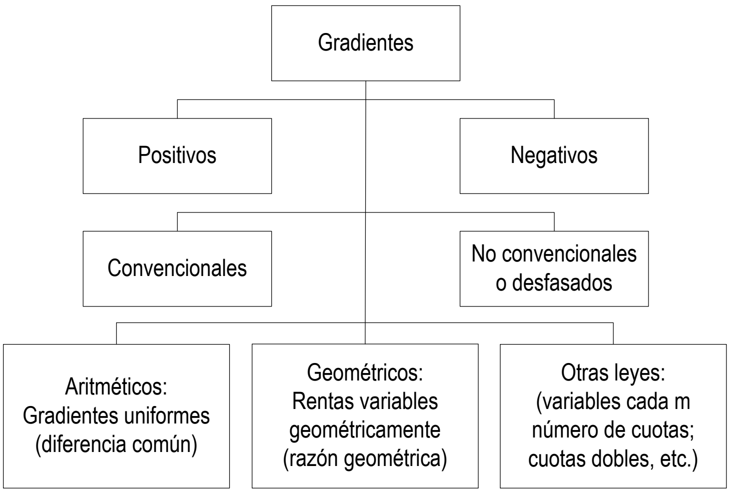


Figura 6.2 Clasificación de los gradientes.

Gradientes positivos

Son los importes positivos de los gradientes con relación a una cuota base, que se toma como referencia. Los gradientes positivos originan que las rentas de la anualidad se incrementen a lo largo del horizonte temporal.

Por ejemplo, en la tabla 6.1 se observan los siguientes casos:

- Caso 1: el gradiente aritmético G es + 50.
- Caso 2: el gradiente geométrico o razón de variación g es 1,05 (un valor mayor que uno).
- Caso 3: el gradiente aritmético G es + 50 que varía después de cada 2 rentas; en este caso m=2.
- Caso 4: el gradiente geométrico o razón de variación g es 1,05 (un valor mayor que uno) que se aplica después de cada 2 rentas; en este caso m=2.

Caso Nº	Variación	1	2	3	4	5	6
1	G=+50	1 000,00	1 050,00	1 100,00	1 150,00	1 200,00	1 250,00
2	g=1,05	1 000,00	1 050,00	1 102,50	1 157,63	1 215,51	1 276,28
3	G=+50; m=2	1 000,00	1 000,00	1 050,00	1 050,00	1 100,00	1 100,00
4	g=1,05; m=2	1 000,00	1 000,00	1 050,00	1 050,00	1 102,50	1 102,50

Tabla 6.1 Anualidades con variaciones positivas.

Gradientes negativos
Son los importes negativos de los gradientes con relación a una cuota base, que se toma como referencia. Los gradientes negativos originan que las rentas de la anualidad disminuyan a lo largo del horizonte temporal.

Por ejemplo, en la tabla 6.2 se observan los siguientes casos:

- Caso 1: el gradiente aritmético G es - 50.
- Caso 2: el gradiente geométrico o razón de variación g es 0,95 (un valor menor que uno).
- Caso 3: el gradiente aritmético G es - 50 que varía después de cada 2 rentas; en este caso m=2.

Caso Nº	Variación	1	2	3	4	5	6
1	G= -50	1 000,00	950,00	900,00	850,00	800,00	750,00
2	g=0,95	1 000,00	950,00	902,50	857,38	814,51	773,78
3	G= -50; m=2	1 000,00	1 000,00	950,00	950,00	900,00	900,00
4	g=0,95; m=2	1 000,00	1 000,00	950,00	950,00	902,50	902,50

Tabla 6.2 Anualidades con variaciones negativas.

En una misma anualidad pueden presentarse series uniformes (como si fuesen anualidades simples) conjuntamente con rentas que varían positivamente y negativamente, y luego varían con gradientes positivos y negativos.

Gradientes convencionales
Cuando en una anualidad las variaciones en los importes de las rentas se originan a partir de la segunda renta, se genera un gradiente convencional.

Gradientes no convencionales o gradientes desfasados
Una anualidad con gradientes uniformes no convencionales o desfasados, es aquélla cuyos períodos de rentas son uniformes pero el primer gradiente no nulo aparece en un momento posterior a la segunda renta, donde los períodos de renta y de tasa son iguales.

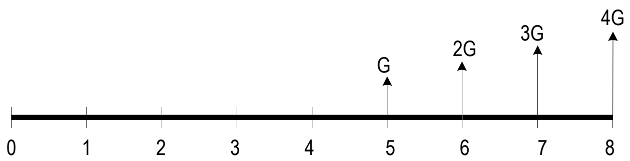


Figura 6.3 Anualidad de gradientes uniformes desfasados en el cual el primer gradiente no nulo aparece al término del quinto período.

Gradientes aritméticos
Cuando las rentas de una anualidad cuyos periodos de renta y períodos de tasa son uniformes, y varían en un importe uniforme, generan gradientes aritméticos, o gradientes uniformes.

Un gradiente aritmético es la variación uniforme que se produce entre los importes de dos rentas consecutivas de una anualidad; es decir, es la diferencia común que existe entre cualquiera de dos rentas consecutivas de una anualidad.

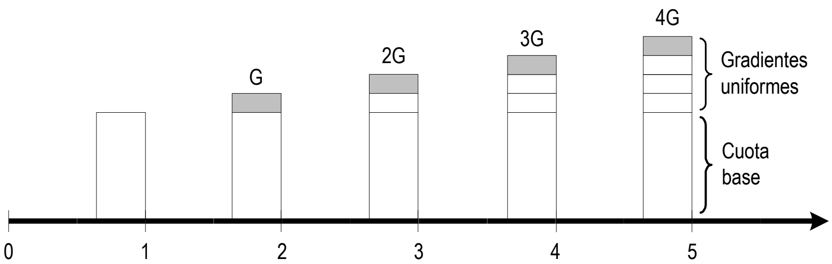


Figura 6.4 Anualidad con rentas que varían en progresión aritmética.

La anualidad con rentas que varían en progresión aritmética puede descomponerse en una anualidad de las cuotas bases, que es una anualidad simple (como se observa en la figura 6.3); y una anualidad de gradientes uniformes (como se muestra en la figura 6.4), en la cual G representa el cambio uniforme en la magnitud de las rentas de la anualidad.

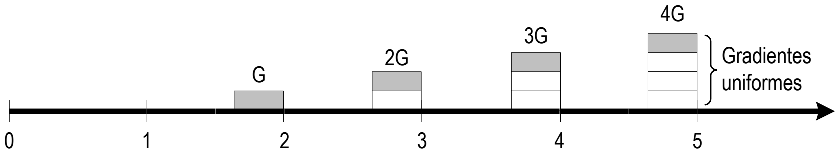


Figura 6.5 Anualidad de gradientes uniformes convencionales positivos.

Gradientes geométricos
Cuando las rentas de una anualidad varían de acuerdo con una razón geométrica mayor o menor que uno, se generan gradientes geométricos. Si la razón es mayor que uno las rentas son crecientes; si la razón es menor que uno se generan rentas decrecientes. Por ejemplo, en una anualidad cuyas rentas mensuales son: 100; 105; 110,25; 115,76; 121,55 y 127,63; la razón geométrica es 1,05 y como esta razón es mayor que uno, las variaciones son positivas.

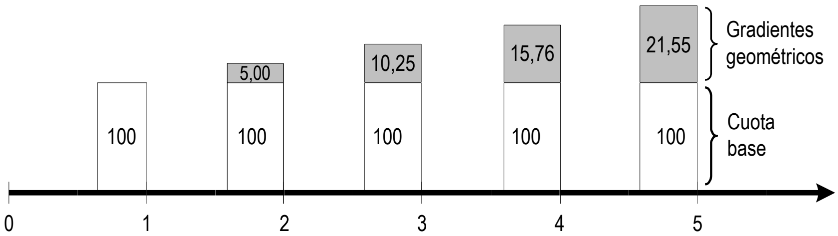


Figura 6.6 Anualidad con rentas que varían en progresión aritmética cuya razón es 1,05.

Otras leyes
Los gradientes pueden variar de acuerdo con otras leyes distintas a la progresión aritmética, o a la progresión geométrica. Por ejemplo, cuando:

- Un préstamo se amortiza con cuotas uniformes mensuales durante un año y luego esta cuota uniforme se incrementa (aritméticamente, geométricamente, etc.), pero sus rentas permanecen sin variación durante el segundo año, y así sucesivamente.

- Un préstamos se amortiza con cuotas son uniformes en el año, pero en los meses de julio y diciembre deben pagarse cuotas dobles.

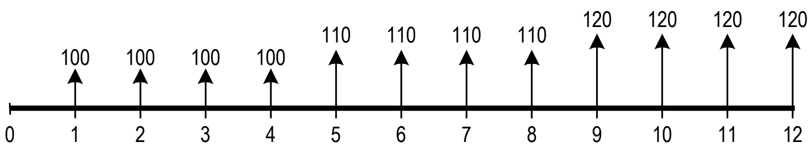


Figura 6.7 Anualidad con rentas uniformes, que varían en progresión aritmética después de cuatro rentas uniformes.

Ejemplo 6.1
Dibuje el diagrama de flujo de caja para la empresa Norsur, que introdujo un nuevo producto al mercado, cuyas ventas mensuales se proyectan en 10 000 um y, por la evolución de su posicionamiento en el mercado, espera que al término del sexto mes las ventas mensuales alcancen 12 500 um, y los incrementos se distribuyen de manera uniformemente durante cada mes de dicho período.

Solución
El enésimo término de una sucesión aritmética a_n en función de su primer término a_1, el número de términos n y la diferencia común d, se calcula con la siguiente fórmula:

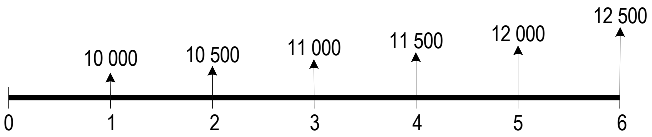
$a_n = a_1 + (n-1)d$ (a)

Al despejar d de la ecuación (a) se tiene:

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

Al designar $a_n = R_n$ y $a_1 = R$ se soluciona el problema de la siguiente forma:

$G = \frac{R_n - R}{n-1}$ $\qquad G = \frac{12500-10000}{6-1} = 500$



6.2 Valor presente de anualidad de gradientes uniformes convencionales

En una anualidad cuyas rentas varían en progresión aritmética, los gradientes son uniformes, es decir la diferencia entre una renta y la anterior es siempre la misma. La anualidad con rentas que varían en progresión aritmética puede descomponerse en una anualidad de las cuotas bases (anualidad simple), y una anualidad de gradientes uniformes, como se observa en las figuras 6.4 y 6.5.

Demostración de la fórmula del valor presente de una anualidad de gradientes uniformes convencionales
Si de una anualidad con rentas que varían en progresión aritmética se toma sólo la parte de la anualidad de gradientes uniformes convencionales positivos que constituye una serie de gradiente uniforme, puede hallarse su valor presente con una tasa i cuyo período coincide con el período de las rentas.

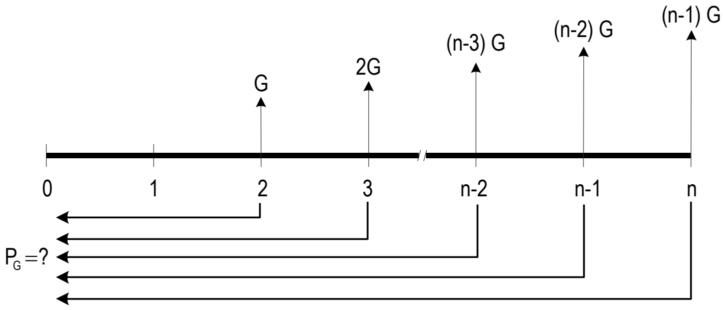


Figura 6.8 Anualidad de gradientes uniformes convencionales.

$$P_G=\frac{G}{(1+i)^2}+\frac{2G}{(1+i)^3}+\cdots+\frac{(n-2)G}{(1+i)^{n-1}}+\frac{(n-1)G}{(1+i)^n} \quad (1)$$

$$P_G=G\left[\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{2}{(1+i)^3}+\cdots+\frac{(n-2)}{(1+i)^{n-1}}+\frac{(n-1)}{(1+i)^n}\right] \quad (2)$$

Al multiplicar ambos miembros por (1+i)

$$P_G(1+i)=G\left[\frac{1}{(1+i)^1}+\frac{2}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{(n-2)}{(1+i)^{n-2}}+\frac{(n-1)}{(1+i)^{n-1}}\right] \quad (3)$$

Al restar (2) de (3)

$$P_G(1+i)=G\left[\frac{1}{(1+i)^1}+\frac{2}{(1+i)^2}+\cdots+\frac{(n-2)}{(1+i)^{n-2}}+\frac{(n-1)}{(1+i)^{n-1}}\right] \quad (3)$$

$$-P_G=G\left[\quad -\frac{1}{(1+i)^2}- \quad \dots \quad -\frac{(n-2)}{(1+i)^{n-1}}+\frac{(n-1)}{(1+i)^n}\right] \quad -(2)$$

$$P_Gi=G\left[\frac{1}{(1+i)^1}+\frac{1}{(1+i)^2}+ \quad \dots \quad +\frac{1}{(1+i)^{n-1}}+\frac{1-n}{(1+i)^n}\right] \quad (4)$$

$$P_Gi=G\left[\frac{1}{(1+i)^1}+\frac{1}{(1+i)^2}+ \quad \dots \quad +\frac{1}{(1+i)^{n-1}}+\frac{1}{(1+i)^n}-\frac{n}{(1+i)^n}\right] \quad (5)$$

$$P_Gi=G\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}-\frac{n}{(1+i)^n}\right] \quad (6)$$

Al dividir (6) por i y reagrupar términos se tiene:

$$\boxed{P_G=G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}-\frac{n}{(1+i)^n}\right]\right\}} \quad (6.1a)$$

La fórmula (6.1a) calcula el valor presente de una anualidad de gradientes uniformes convencionales, en la cual i y n deben ser del mismo período de G.

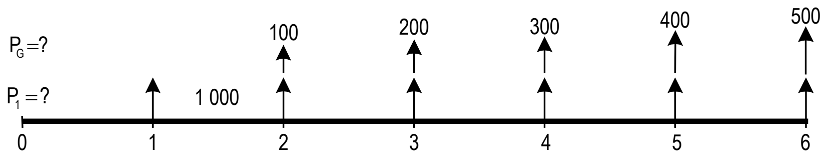
El Factor de Actualización de la Serie de Gradientes uniformes convencionales FASG
En la fórmula (6.1a) los términos entre corchetes constituyen el Factor de Actualización de la Serie uniforme de una anualidad de gradientes uniformes convencionales (FASG), por lo tanto la fórmula (6.1a) se representa:

$$P_G = G.FASG_{i;n} \qquad (6.1b)$$

La fórmula (6.1b) se lee: "el FASG de una anualidad de gradientes uniformes convencionales a una tasa i por período durante n períodos de renta, transforma una serie de gradientes uniformes G en un valor presente P". El $FASG = \left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]\right\}$ es el valor presente de una anualidad cuyos gradientes uniformes convencionales son de 1 um.

Ejemplo 6.2
Un préstamo debe cancelarse en el plazo de medio año con cuotas mensuales vencidas crecientes aritméticamente; la cuota base es 1 000 um y su gradiente uniforme convencional es 100 um. Calcule el importe del préstamo con una TEM de 0,015.

Solución
Con los datos CB=1 000; G=100; n=6; y TEM=0,015 se calcula el valor presente de las cuotas bases y de los gradientes uniformes.



a. Valor presente de las cuotas bases

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] \qquad P_1 = 1\ 000\left[\frac{1{,}015^6-1}{0{,}015\times 1{,}015^6}\right]$$

$$P_1 = 1\ 000 \times 5{,}697187165 = 5\ 607{,}19$$

b. Valor presente de la anualidad de los gradientes uniformes convencionales

$$P_G = G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]\right\} \qquad P_G = 100\left\{\frac{1}{0{,}015}\left[\frac{1{,}015^6-1}{0{,}015\times 1{,}015^6} - \frac{6}{1{,}015^6}\right]\right\}$$

$$P_G = 100\{66{,}666[5{,}697187166 - 5{,}487253155]\} = 1\ 399{,}56$$

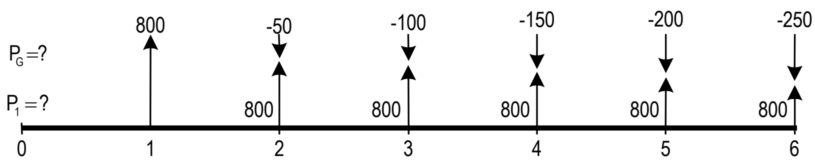
c. Valor presente de la anualidad cuyas rentas varían en progresión aritmética

$$P = P_1 + P_G \qquad P = 5\ 697{,}19 + 1\ 399{,}56 = 7\ 096{,}75$$

Gradientes uniformes convencionales negativos
En una anualidad con gradientes uniformes negativos convencional, la cuota base o primera renta es el flujo de mayor importe de la serie, la misma que disminuye en una cantidad uniforme. Para hallar su valor presente o renta uniforme se aplican las mismas fórmulas anteriormente, la única diferencia es que G es negativo.

Ejemplo 6.3
Con una TEM de 0,03 calcule el valor presente de una anualidad de seis meses, cuya primera renta mensual vencida es 800 um, estas rentas disminuirán en 50 um a partir de la segunda renta.

Solución
Con los datos CB=800; G=-50; n=6; y TEM=0,03 se calcula el valor presente de las cuotas bases y de los gradientes uniformes.



a. Valor presente de las cuotas bases

$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$ $\qquad P_1 = 800\left[\frac{1{,}03^6-1}{0{,}03\times1{,}03^6}\right]$

$$P_1 = 800 \times 5{,}417191444 = 4\ 333{,}75$$

b. Valor presente de la anualidad de los gradientes uniformes negativos convencionales

$P_G = G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]\right\}$ $\qquad P_G = -50\left\{\frac{1}{0{,}03}\left[\frac{1{,}03^6-1}{0{,}03\times1{,}03^6} - \frac{6}{1{,}03^6}\right]\right\}$

$P_G = -50\{33{,}333[5{,}417191444 - 5{,}02490554]\} = -653{,}81$

c. Valor presente de la anualidad cuyas rentas varían en progresión aritmética

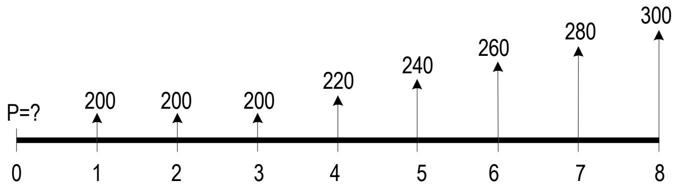
$P = P_1 + P_G$ $\qquad P = 4\ 333{,}75 - 653{,}81 = 3\ 679{,}94$

6.3 Valor presente de anualidad de gradientes uniformes desfasados

Para el cálculo del valor presente de una anualidad de gradientes uniformes no convencionales o desfasados, se sugiere:

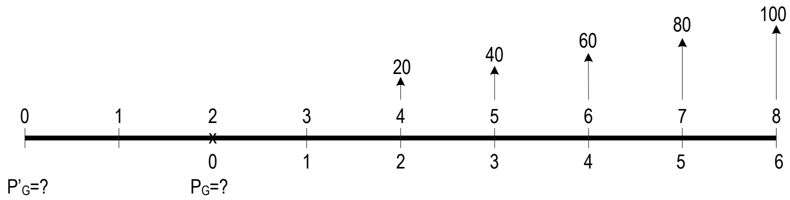
- Ubicar en el diagrama de flujo de caja el momento en que aparece el primer gradiente uniforme.
- Ubicado el momento de inicio del gradiente uniforme debe renumerar los períodos de renta y señalar el momento en que aparece el primer gradiente como el momento 2.
- Renumeradas las rentas, la anualidad de los gradientes desfasados se trata como una de gradientes uniformes convencionales, y al aplicar la fórmula (6.1a) se llevan todos los gradientes uniformes al momento renumerado como 0.
- Se lleva dicho stock de efectivo al momento 0 del diagrama del flujo de caja original.

Ejemplo 6.4
En el diagrama de flujo de caja mensual siguiente:



a. Calcule el valor presente de la anualidad de gradientes uniformes desfasados.
b. El valor presente de toda la anualidad. En ambos casos utilice una TEM de 0,03.

Solución
a. Calculo del valor presente de los gradientes uniformes desfasados.



$$P_G = G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]\right\}$$

$$P_G = 20\left\{\frac{1}{0{,}03}\left[\frac{1{,}03^6-1}{0{,}03\times 1{,}03^6} - \frac{6}{1{,}03^6}\right]\right\}$$

$$P_G = 20\{33{,}333[5{,}417191444 - 5{,}02490554]\} = 261{,}52$$

$$P'_G = 261{,}52 \times 1{,}03^{-2} = 246{,}51$$

b. Calculo del valor presente de las cuotas bases.

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] \qquad P_1 = 200\left[\frac{1{,}03^8-1}{0{,}03\times 1{,}03^8}\right]$$

$$P_1 = 200 \times 7{,}019692189 = 1\,403{,}94$$

c. Calculo del valor presente de toda la anualidad con gradiente.

$$P = P_1 + P_G \qquad P = 1\,403{,}94 - 246{,}51 = 1\,650{,}45$$

6.4 Renta uniforme de anualidad de gradientes uniformes

La figura 6.9 muestra una anualidad de gradientes uniformes convencionales, porque el primer gradiente se inicia en la segunda cuota. ¿Cómo puede transformarse en una anualidad simple equivalente, cuyas rentas sean uniformes como se muestra en la figura 6.10?

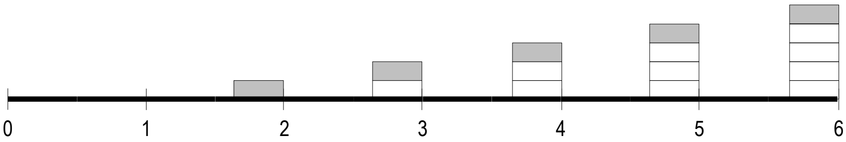


Figura 6.9 Anualidad de gradientes uniformes convencionales.

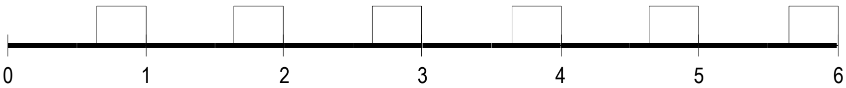


Figura 6.10 Anualidad de gradientes uniformes (de la figura 6.9), convertida en una anualidad simple equivalente de rentas uniformes.

Para convertir una anualidad de gradientes uniformes se sugiere seguir los siguientes pasos:

- Hallar el valor presente de la anualidad de gradientes uniformes con la fórmula (6.1a).
- Transformar el valor presente de la anualidad de gradientes uniformes, en una anualidad de rentas uniformes simples vencidas con la fórmula (2.4a).

$$R= P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right] \qquad \text{(1) Fórmula (2.4a)}$$

$$P_G= G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}-\frac{n}{(1+i)^n}\right]\right\} \qquad \text{(2) Fórmula (6.1a)}$$

$$R= G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}-\frac{n}{(1+i)^n}\right]\right\}\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right] \qquad \text{(3) Al reemplazar (6.1a) en (2.4a)}$$

$$R= G\left\{\frac{1}{i}\left[1-\frac{ni}{(1+i)^n-1}\right]\right\} \qquad (4)$$

Al reagrupar términos en (4) se tiene:

$$\boxed{R_G = G\left[\frac{1}{i}-\frac{n}{(1+i)^n-1}\right]} \qquad (6.2a)$$

La fórmula (6.2a) transforma una anualidad de gradientes uniformes convencionales G en rentas equivalentes uniformes R, en la cual i y n deben ser del mismo período de G.

El Factor de Recuperación del Capital de Gradientes uniformes FRCG
En la fórmula (6.2a) los términos entre corchetes constituyen el Factor de Recuperación del Capital de Gradientes uniformes convencionales (FRCG), por lo tanto la fórmula (6.2a) se representa:

$$\boxed{R_G = G.FRCG_{i;n}} \qquad (6.2b)$$

La fórmula (6.2b) se lee: "el FRCG de una anualidad de gradientes uniformes convencionales a una tasa i por período durante n períodos de renta, transforma una serie de gradientes uniformes convencionales G, en un valor presente P". El $FRCG = \left[\frac{1}{i}-\frac{n}{(1+i)^n-1}\right]$ es una anualidad simple vencida cuyas rentas uniformes de 1 um, se obtuvieron a partir de una anualidad de gradientes uniformes convencionales; es decir transforma una anualidad de gradientes uniformes convencionales G en una serie de rentas uniformes equivalentes de valor 1 um.

Ejemplo 6.5
En una anualidad cuyo horizonte temporal es 2 años, deben realizarse pagos vencidos trimestrales cuya cuota base de 500 um se incrementará en 50 um en cada trimestre. Prepare una alternativa equivalente que considere todas las cuotas uniformes, calcule el importe de esa cuota uniforme con una TET de 0,02.

Solución
Con los datos CB=50; G=50, n=8 y TET=0,02 se calcula la renta uniforme equivalente.

a. Cálculo de la renta uniforme de la anualidad de los gradientes.

$$R_G = G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad R_G = 50\left[\frac{1}{0{,}02} - \frac{8}{1{,}02^8 - 1}\right]$$

$$R_G = 50[50 - 46{,}60391966]$$

b. Cálculo de la renta uniforme de la anualidad con gradiente uniforme convencional.

$$R = CB + R_G \qquad R = 500{,}00 + 169{,}80 = 669{,}8$$

6.5 Valor futuro de anualidad de gradientes uniformes convencionales y desfasados

La figura 6.11 muestra una anualidad compuesta por gradientes uniformes convencionales que se inician en la segunda cuota base y se capitalizan hasta el momento n. ¿Cómo puede hallarse su respectivo valor futuro?

Demostración de la fórmula del valor futuro de una anualidad de gradientes uniformes convencionales

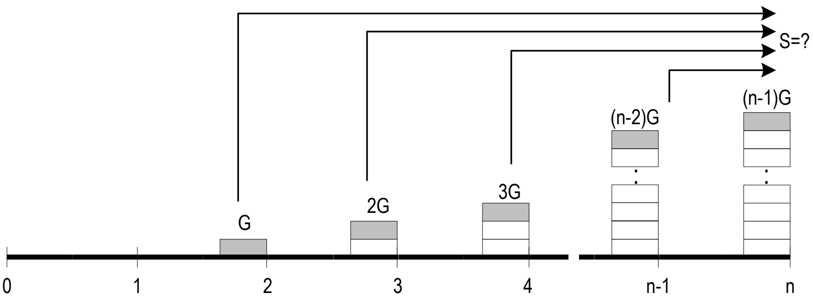


Figura 6.11 Valor futuro de una anualidad de gradientes uniformes convencionales.

Al efectuar la evaluación en el momento n, se tiene:

$$S = G(1+i)^{n-2} + 2G(1+i)^{n-3} + \cdots + (n-2)G(1+i) + (n-1)G \qquad (1)$$

Al multiplicar por (1+i)

$$S(1+i) = G(1+i)^{n-1} + 2G(1+i)^{n-2} + \cdots + (n-2)G(1+i)^2 + (n-1)G(1+i) \qquad (2)$$

Al restar (2)-(1)

$$S = \qquad G(1+i)^{n-2} + \cdots + (n-2)G(1+i) + (n-1)G \qquad (1)$$

$$-S(1+i) = -G(1+i)^{n-1} - 2G(1+i)^{n-2} - \cdots - (n-1)G(1+i) \qquad (-2)$$

$$S - S(1+i) = -G(1+i)^{n-1} - G(1+i)^{n-2} - \quad \ldots \quad - G(1+i) + (n-1)G$$

$$-Si = -G(1+i)^{n-1} - G(1+i)^{n-2} - \quad \ldots \quad - G(1+i) + (n-1)G$$

Al multiplicar por –1:

$$Si = G(1+i)^{n-1} + G(1+i)^{n-2} + \quad \ldots \quad + G(1+i) + G - nG$$

$$Si = G[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \quad \ldots \quad + \ (1+i) + 1 - n]$$

Al dividir por i y aplicar la fórmula de la suma de una PG

$$\boxed{S_G = G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} - n\right]\right\}} \quad (6.3a)$$

La fórmula (6.3a) transforma una anualidad de gradientes uniformes convencionales G en un valor futuro S_G, en la cual i y n deben ser del mismo período de G.

El Factor de Capitalización de la Serie de Gradientes uniformes FCSG

En la fórmula (6.3a) los términos entre llaves constituyen el Factor de Capitalización de la Serie de Gradientes uniformes convencionales (FCSG), por lo tanto la fórmula (6.3a) se representa:

$$\boxed{S_G = G.FCSG_{i;n}} \quad (6.3b)$$

La fórmula (6.3b) se lee: "el FCSG de una anualidad de gradientes uniformes convencionales a una tasa i por período durante n períodos de renta, transforma una serie de gradientes uniformes convencionales G, en un valor futuro S". El $FCSG = \left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i} - n\right]\right\}$ es el monto de una anualidad de gradientes uniformes convencionales cuyos gradientes uniformes son de 1 um.

Ejemplo 6.6
Calcule el monto que se acumulará en el plazo de medio año con depósitos mensuales vencidos, el primero de los cuales es 300 um, que se incrementarán en 50 um cada mes. Los depósitos generan una TEM de 0,01.

Solución
Con los datos CB=300; G=50; n=6; TEM=0,01, se calcula el valor futuro de los gradientes uniformes convencionales y de las cuotas bases.

a. Cálculo del valor futuro de las cuotas bases.

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \qquad S_1 = 300\left[\frac{1{,}01^6-1}{0{,}01}\right]$$

$$S_1 = 300 \times 6{,}15201506 = 1\,845{,}60$$

b. Cálculo del valor futuro de la anualidad de gradientes uniformes convencionales.

$$S_G = G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i} - n\right]\right\} \qquad S_G = 50\left\{\frac{1}{0{,}01}\left[\frac{1{,}01^6-1}{0{,}01} - 6\right]\right\}$$

$$S_G = 50\{100 \times 6{,}15201506 - 6\} = 760{,}08$$

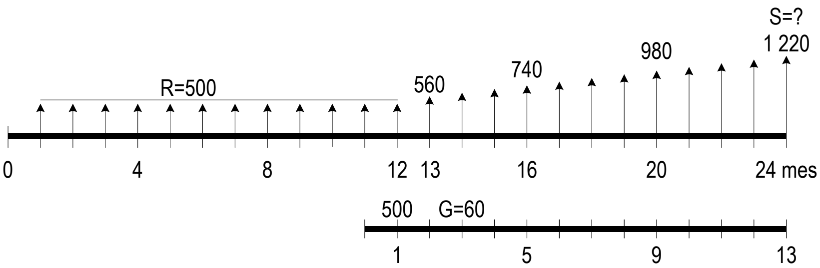
c. Cálculo del valor futuro de la anualidad con gradientes convencionales.

$$S = S_1 + S_G \qquad S = 1\,845{,}60 + 760{,}08 = 2\,605{,}68$$

Valor futuro de gradientes uniformes desfasados
De forma similar a lo tratado con el valor presente de la anualidad de gradientes uniformes desfasados, se presentan casos en los cuales el gradiente uniforme aparece después de la segunda renta; en este caso deben emplearse factores combinados, para llevar esta anualidad hacia el futuro.

Ejemplo 6.7
Una persona efectúa depósitos mensuales vencidos en un banco, que devengan una TET 0,030301. En el primer año, los depósitos son 500 um; en el segundo año los depósitos se incrementan en 60 um cada mes. Calcule el monto al final del segundo año.

Solución
Con los datos CB=500; G=60; n=24; n'=13; TEM=0,01, se calcula el valor futuro de los gradientes uniformes convencionales desfasados y de las cuotas bases. El gradiente es desfasado porque se inicia en la cuota 13.



a. Cálculo del valor futuro de las cuotas bases.

$$S_1 = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \qquad S_1 = 500\left[\frac{(1+0{,}01)^{24}-1}{0{,}01}\right]$$

$$S_1 = 500 \times 26{,}97346485$$

$$S_1 = 13\,486{,}73$$

b. Cálculo del valor futuro de la anualidad de gradientes uniformes desfasados.

$$S_G = G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^{n'}-1}{i} - n\right]\right\} \qquad S_G = 60\left\{\frac{1}{0{,}01}\left[\frac{(1+0{,}01)^{13}-1}{0{,}01} - 13\right]\right\}$$

$$S_G = 60\{100[0{,}809328043]\}$$

$$S_G = 4\,855{,}97$$

c. Cálculo del valor futuro de la anualidad con gradientes uniformes desfasados.

$$S = S_1 + S_G$$

$$S = 13\,486{,}73 + 4\,855{,}97$$

$$S = 18\,342{,}70$$

6.6 Valor presente de anualidad con rentas que varían en progresión geométrica

La figura 6.12 muestra una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica, donde R es la cuota base y g es la razón de variación geométrica, que se produce entre dos rentas consecutivas. Cuando g >1 la anualidad es creciente y cuando g <1 la anualidad es decreciente.

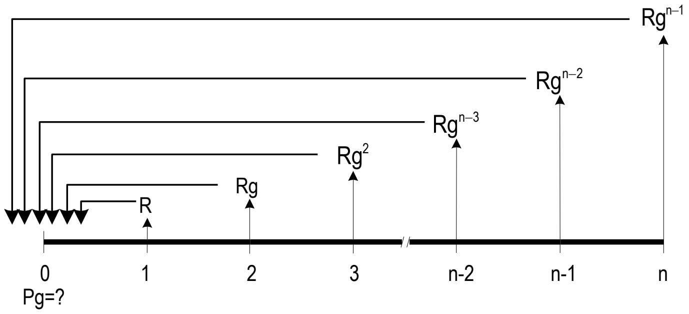


Figura 6.12 Anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica y se descuentan hacia el momento cero.

Valor presente cuando g≠(1+i)

Con la fórmula de la suma de una progresión geométrica PG= $\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$, donde $a_1 = \frac{R}{1+i}$, $r = \frac{g}{1+i}$, se deduce la fórmula del valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica P_g.

$$P_g = \frac{R}{(1+i)^1} + \frac{R_g}{(1+i)^2} + \frac{R_g^2}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R_g^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{R_g^{n-1}}{(1+i)^n} \quad (1)$$

Al aplicar la fórmula de la suma de los términos de una PG

$$P_g = \frac{\frac{R}{1+i}\left[\left(\frac{g}{1+i}\right)^n - 1\right]}{\frac{g}{1+i} - 1} \quad (2)$$

$$P_g = \frac{\frac{R}{1+i}\left[\frac{g^n}{(1+i)^n} - \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]}{\frac{g}{1+i} - \frac{1+i}{1+i}} \quad (3)$$

$$P_g = \frac{\frac{R}{1+i}\left[\frac{g^n-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]}{\frac{g}{1+i} - \frac{1+i}{1+i}} \quad (4)$$

$$P_g = \frac{R\left[\frac{g^n-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]}{g-1-i} \quad (5)$$

$$P_g = \frac{R}{(1+i)^n}\left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right] \quad (6)$$

$$\boxed{P_g = R\left\{\frac{1}{(1+i)^n} \times \left[\frac{g^n - (1+i)^n}{g-1-i}\right]\right\}} \quad (6.4a)$$

La fórmula (6.4a) calcula el valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica en la cual i y n deben ser del mismo período, y $g \neq (1+i)$.

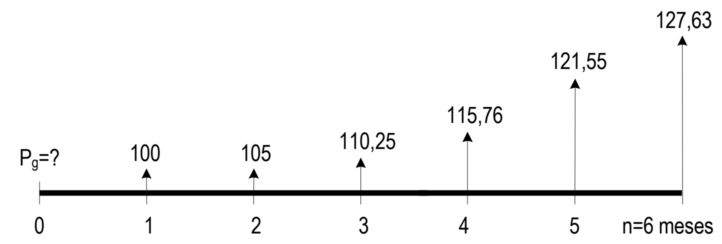
El Factor de Actualización de la serie de la anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica y g≠(1+i), FASg

En la fórmula (6.4a) los términos entre llaves constituyen el Factor de Actualización de la Serie de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica (FASg), por lo tanto la fórmula (6.4a) se representa:

$$\boxed{P_g = R.FASg_{i;n}} \quad (6.4b)$$

La fórmula (6.4b) se lee: "el FASg de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica a una tasa i por período durante n períodos de renta, transforma sus rentas en un valor presente P". El $FAS_g = \left\{\frac{1}{(1+i)^n} \times \left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right]\right\}$ es el valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica y su cuota base es 1 um.

Ejemplo 6.8
Calcule el valor presente de la anualidad cuyos datos se presentan en el siguiente gráfico. Utilice una TEM de 0,04.



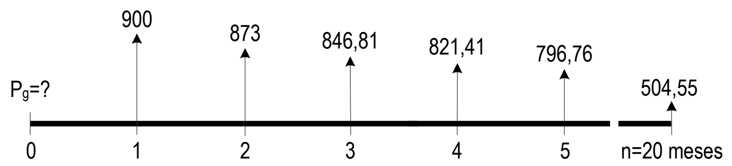
Solución
La razón de crecimiento geométrico se obtiene al dividir cualquier renta entre la inmediata anterior, por ejemplo 105÷100=1,05. Con los datos CB=100; TEM=0,04; g=1,05 y n=6 se calcula P_g con la fórmula (6.4a).

$$P_g = R\left\{\frac{1}{(1+i)^n} \times \left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right]\right\} \qquad P_g = 100\left\{\frac{1}{1{,}04^6} \times \left[\frac{1{,}05^6-1{,}04^6}{1{,}05-1-0{,}04}\right]\right\}$$

$$P_g = 100\{0{,}790314525 \times 7{,}477662251\} = 590{,}97$$

Ejemplo 6.9
Una empresa sacó al mercado un nuevo producto cuyo costo de producción mensual el próximo mes será 900 um. En un informe conjunto de los departamentos de producción y de ventas, se llegó a la conclusión que los costos de producción disminuirán 3% mensual durante un período de 20 meses consecutivos. Calcule el valor presente de los costos durante ese período de tiempo con una TEM de 0,02.

Solución
Con los datos CB=900; TEM=0,02; g=1-0,03; y n=20 se calcula P_g con la fórmula (6.4a).



$$P_g = R\left\{\frac{1}{(1+i)^n} \times \left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right]\right\} \qquad P_g = 900\left\{\frac{1}{1{,}02^{20}} \times \left[\frac{0{,}97^{20}-1{,}02^{20}}{0{,}97-1-0{,}02}\right]\right\}$$

$$P_g = 900\{0{,}672971333 \times 18{,}84306106\} = 11\,412{,}76$$

Valor presente cuando g=(1+i)

$$P_g = \frac{R}{(1+i)^1} + \frac{R_g}{(1+i)^2} + \frac{R_g^2}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R_g^{n-2}}{(1+i)^{n-1}} + \frac{R_g^{n-1}}{(1+i)^n}$$

Como (1+i)=g

$$P_g = \frac{R}{g^1} + \frac{R_g}{g^2} + \frac{R_g^2}{g^3} + \cdots + \frac{R_g^{n-2}}{g^{n-1}} + \frac{R_g^{n-1}}{g^n}$$

$$P_g = \frac{R}{g} + \frac{R}{g} + \frac{R}{g} + \cdots + \frac{R}{g} + \frac{R}{g}$$

$P_g = \frac{nR}{g}$

$$\boxed{P_g = R\left[\frac{n}{g}\right]} \quad (6.5)$$

La fórmula (6.5) calcula el valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica en la cual i y n deben ser del mismo período de R, y donde $g=(1+i)$. En el presente caso el término entre corchetes de la fórmula (6.5) es el FASg cuando g=(1+i).

Ejemplo 6.10
Calcule el valor presente de una anualidad cuyas rentas mensuales vencidas en un horizonte temporal de un año, tiene una razón de crecimiento de 1,02. La cuota base es 800 um y la TEM es 0,02.

Solución
Con los datos CB=800; TEM=0,02; g=1,02 y n=12 se calcula P_g con la fórmula (6.5).

$P_g = R\left[\frac{n}{g}\right]$ $\qquad P_g = 800\left[\frac{12}{1{,}02}\right] = 800 \times 11{,}76470588 = 9\ 411{,}76$

Cálculo de la cuota base de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando g≠(1+i)
Cuando $g \neq (1+i)$ y además se conocen P_g, g, i y n, la cuota base R de la anualidad con rentas que varían en progresión geométrica, se calcula al despejarla en la fórmula (6.4a).

$$P_g = \frac{R}{(1+i)^n} \times \left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right] \qquad (6.4a)$$

$$\frac{R}{(1+i)^n} = \frac{P_g(g-1-i)}{g^n-(1+i)^n}$$

$$R = \frac{P_g(g-1-i)(1+i)^n}{g^n-(1+i)^n}$$

$$\boxed{R = P_g\left\{(1+i)^n\left[\frac{g-1-i}{g^n-(1+i)^n}\right]\right\}} \quad (6.6)$$

La fórmula (6.6) calcula la cuota base o primera renta de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica, en la cual i y n deben ser del mismo período de R_g, y $g \neq (1+i)$. El término entre llaves de la fórmula (6.6) es el equivalente de un FRCg de la anualidad que varía en progresión geométrica, válido sólo para obtener la cuota base o primera cuota de la anualidad.

Ejemplo 6.11
Un préstamo de 10 000 um que debe amortizarse en el plazo de un año con cuotas mensuales vencidas que se incrementarán en 2% mensualmente, devenga una TEM de 0,01. Calcule el importe de la primera cuota o cuota base.

Solución
Con los datos P_g=10 000; TEM=0,01; g=1,02 y n=12 se calcula CB con la fórmula (6.6).

$R_g = P_g\left\{(1+i)^n\left[\frac{g-1-i}{g^n-(1+i)^n}\right]\right\}$ $\qquad R_g = 10\ 000\left\{1{,}01^{12}\left[\frac{1{,}02-1-0{,}01}{1{,}02^{12}-1{,}01^{12}}\right]\right\}$

$R_g = 10\ 000\{1{,}12682503 \times 0{,}070712974\} = 796{,}81$

Cálculo de la cuota base de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando g=(1+i)
Cuando $g=(1+i)$ y además se conocen P_g, g, i y n, la cuota base R de la anualidad con rentas que varían en progresión geométrica, se calcula al despejarla en la fórmula (6.5).

$$\boxed{R = P_g\left[\frac{g}{n}\right]} \quad (6.7)$$

La fórmula (6.7) calcula la cuota base o primera renta de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica, en la cual i y n deben ser del mismo período de R_g, y $g=(1+i)$. En el presente caso el término entre corchetes de la fórmula (6.7) actúa como un FRCg cuando $g=(1+i)$.

Ejemplo 6.12
Un préstamo de 10 000 um que devenga una TEM de 0,02 debe amortizarse en el plazo de un año, con cuotas mensuales vencidas que se incrementarán 2% mensualmente. Calcule el importe de la primera cuota, o cuota base.

Solución
Con los datos P_g=10 000; TEM=0,02; g=1,02 y n=12 se calcula R con la fórmula (6.7).

$R = P_g\left[\frac{g}{n}\right]$ $\qquad R = 10\,000\left[\frac{1,02}{12}\right] = 10\,000 \times 0,085 = 850$

6.7 Valor futuro de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica

La figura 6.13 muestra una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica, donde R es la cuota base y g es la razón de variación geométrica, que se produce entre dos rentas consecutivas. Cuando g >1 la anualidad es creciente y cuando g <1 la anualidad es decreciente.

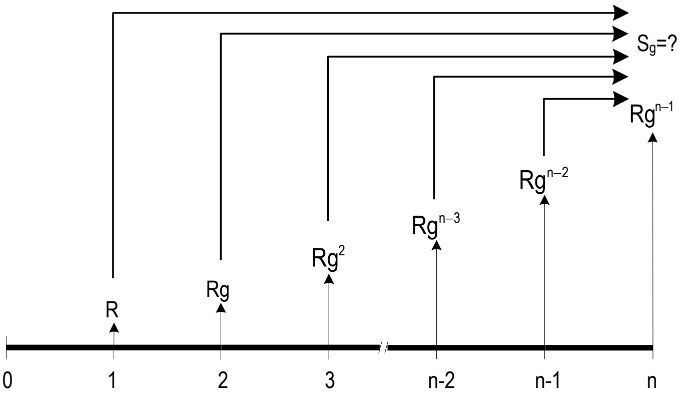


Figura 6.13 Anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica creciente y se capitalizan hasta el momento n.

Valor futuro cuando g≠(1+i) y las rentas son crecientes o decrecientes
A partir de la fórmula (6.4a) que calcula el valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica se calcula su respectivo valor futuro, al llevar ese importe del presente n períodos hacia el futuro.

$$P_g = R\left\{\frac{1}{(1+i)^n} \times \left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right]\right\} \qquad (6.4a)$$

$$S_g = R\left\{\frac{1}{(1+i)^n} \times \left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right]\right\}(1+i)^n$$

$$\boxed{S_g = R\left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right]} \quad (6.8a)$$

La fórmula (6.8a) calcula el valor futuro de una anualidad cuyas rentas varían (crecen o decrecen) en progresión geométrica, en la cual i y n deben ser del mismo período, y $g \neq (1+i)$.

El Factor de capitalización de la serie de la anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica y g≠(1+i), FCSg
En la fórmula (6.8a) los términos entre corchetes constituyen el Factor de Capitalización de la Serie de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica (FCSg), por lo tanto la fórmula (6.8a) se representa:

$$\boxed{S_g = R.FCSg_{i;n}} \quad (6.8b)$$

La fórmula (6.8b) se lee: "el FCSg de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica a una tasa i por período durante n períodos de renta, transforma sus rentas en un valor futuro S". El $FCSg = \left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right]$ es el valor futuro de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica y su cuota base es 1 um.

Ejemplo 6.13
Calcule el fondo que se acumulará en el plazo de 10 meses con depósitos mensuales vencidos que devengan una TEB de 0,0201. El primer depósito o cuota base es 100 um y los siguientes depósitos se incrementan 5% en cada mes.

Solución
Con los datos CB=100; TEM=0,01; g=1,05 y n=10 se calcula S_g con la fórmula (6.8a).

$S_g = R\left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right]$ $\quad\quad$ $S_g = 100\left[\frac{1{,}05^{10}-1{,}01^{10}}{1{,}05-1-0{,}01}\right]$

$S_g = 100 \times 13{,}10681253 = 1\,310{,}68$

Valor futuro cuando g=(1+i) y las rentas son crecientes geométricamente
A partir de la fórmula (6.5) que calcula el valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica se calcula su respectivo valor futuro, al llevar ese importe del presente n períodos hacia el futuro.

$$P_g = \frac{nR}{g} \qquad (6.5)$$

$$\frac{S_g}{(1+i)^n} = \frac{nR}{g}$$

$$S_g = \left[\frac{nR}{g}\right](1+i)^n$$

$$\boxed{S_g = R\left[\frac{n(1+i)^n}{g}\right]} \qquad (6.9)$$

La fórmula (6.9) calcula el valor futuro de una anualidad cuyas rentas crecen en progresión geométrica, en la cual i y n deben ser del mismo período de R, y donde $g=(1+i)$. El término entre corchetes de la fórmula (6.9) puede considerarse como un FCSg.

Ejemplo 6.14
Calcule el importe del fondo que se acumulará en el plazo de 10 meses con depósitos mensuales vencidos que devengan una TEB de 0,0201. El primer depósito o cuota base es 100 um y los siguientes depósitos se incrementan en 1% en cada mes.

Solución
Con los datos CB=100; TEM=0,01; g=1,01 y n=10 se calcula S_g con la fórmula (6.9), debido a que g=1+ i.

$S_g = R\left[\frac{n(1+i)^n}{g}\right]$ $\quad\quad$ $S_g = 100\left[\frac{10\times 1{,}01^{10}}{1{,}01}\right]$

$S_g = 100 \times 10{,}93685273 = 1\,093{,}69$

6.8 Gradientes uniformes variables aritméticamente cada m número de rentas

En los puntos anteriores se desarrollaron los casos más comunes de gradientes, sin embargo, sobre la base de los puntos anteriores pueden elaborarse otros tipos de gradientes como los que se presentan en las figuras 6.14 y 6.15.

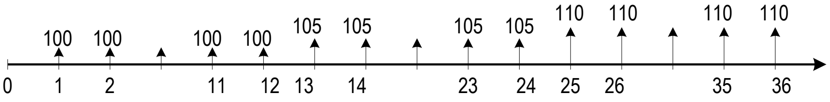


Figura 6.14 Rentas variables con gradientes aritméticos que varían cada m número de rentas (en el presente caso cada 12 meses).

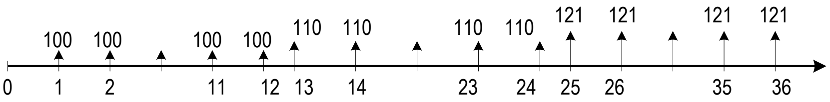


Figura 6.15 Rentas variables geométricamente que varían cada m número de rentas (en el presente caso cada 12 meses).

Fórmula del valor presente de la anualidad cuyas rentas varían en un gradiente aritmético cada m número de rentas

Si R es la cuota uniforme o cuota base, y esta se incrementa en un gradiente aritmético G en cada subhorizonte del horizonte temporal de la anualidad, se puede presentar el siguiente diagrama que se muestra en la figura 6.16.

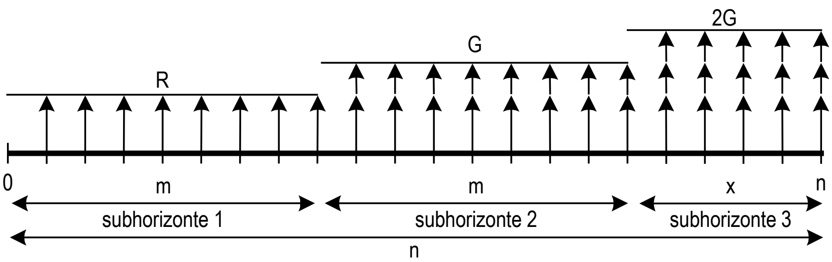


Figura 6.16 Anualidad con rentas que varían en progresión aritmética cada m número de rentas.

Simbología:

n = número de rentas de la anualidad.

m = número de cuotas en los z primeros sub horizontes

z = cociente entero de $\frac{n}{m}$

x = residuo de $\frac{n}{m}$

R = cuota base de la anualidad.

G = gradiente de la m+1 ésima cuota, que varía cada m-ésimo sub horizonte.

La demostración de la fórmula del valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en un gradiente aritmético cada m número de rentas.

$$P = RFAS_{i:m} + \frac{RFAS_{i:m}}{(1+i)^m} + \frac{RFAS_{i:m}}{(1+i)^{2m}} + \cdots + \frac{RFAS_{i:m}}{(1+i)^{(z-1)m}}$$

$$+ \frac{GFAS_{i:m}}{(1+i)^m} + \frac{2GFAS_{i:m}}{(1+i)^{2m}} + \cdots + \frac{(z-1)GFAS_{i:m}}{(1+i)^{(z-1)m}}$$

$$+ \frac{(R+zG)FAS_{i:x}}{(1+i)^{zm}}$$

$$A = RFAS_{i:m}\left[\frac{(1+i)^{-zm}-1}{(1+i)^{-m}-1}\right]$$

$$A = R\left[\frac{(1+i)^{m}-1}{i(1+i)^{m}}\right]\left[\frac{(1+i)^{-zm}-1}{(1+i)^{-m}-1}\right] = R\frac{[(1+i)^{m}-1][(1+i)^{-zm}-1]}{i[1-(1+i)^{m}]}$$

$$A = \frac{R}{i}[1-(1+i)^{-zm}]$$

$$B = GFAS_{i:m}\left[\frac{1}{(1+i)^{m}}+\frac{2}{(1+i)^{2m}}+\frac{3}{(1+i)^{3m}}+\cdots+\frac{z-1}{(1+i)^{(z-1)m}}\right]$$

$$\begin{aligned} D = \frac{1}{(1+i)^{m}}+\frac{1}{(1+i)^{2m}}+\frac{1}{(1+i)^{3m}}+\cdots+\frac{1}{(1+i)^{(z-1)m}} \\ +\frac{1}{(1+i)^{2m}}+\frac{1}{(1+i)^{3m}}+\cdots+\frac{1}{(1+i)^{(z-1)m}} \\ +\frac{1}{(1+i)^{3m}}+\cdots+\frac{1}{(1+i)^{(z-1)m}} \\ \vdots \\ +\frac{1}{(1+i)^{(z-1)m}} \end{aligned}$$

$$D = (1+i)^{-m}\left[\frac{(1+i)^{-m(z-1)}-1}{(1+i)^{-m}-1}\right]$$

$$+(1+i)^{-2m}\left[\frac{(1+i)^{-m(z-2)}-1}{(1+i)^{-m}-1}\right]$$

$$+(1+i)^{-3m}\left[\frac{(1+i)^{-m(z-3)}-1}{(1+i)^{-m}-1}\right]$$

$$\vdots$$

$$D = (1+i)^{-m}\left[\frac{(1+i)^{m-zm}-1}{(1+i)^{-m}-1}\right]+(1+i)^{-2m}\left[\frac{(1+i)^{2m-zm}-1}{(1+i)^{-m}-1}\right]+(1+i)^{-3m}\left[\frac{(1+i)3^{m-zm}-1}{(1+i)^{-m}-1}\right]+\cdots$$

$$D = \frac{1}{(1+i)^{-m}-1}\{[(1+i)^{-zm}-(1+i)^{-m}]+[(1+i)^{-zm}-(1+i)^{-2m}]+[(1+i)^{-zm}-(1+i)^{-3m}]+\cdots\}$$

$$D = \frac{1}{(1+i)^{-m}-1}\{(z-1)(1+i)^{-zm}-[(1+i)^{-m}+(1+i)^{-2m}+(1+i)^{-3m}+\cdots]\}$$

$$D = \frac{1}{(1+i)^{-m}-1}\left\{(z-1)(1+i)^{-zm}-(1+i)^{-m}\left[\frac{(1+i)^{-m(z-1)}-1}{(1+i)^{-m}-1}\right]\right\}$$

$$B = \frac{G\,FAS_{i;m}}{(1+i)^{-m}-1}\left\{(z-1)(1+i)^{-zm}-(1+i)^{-m}\left[\frac{(1+i)^{-m(z-1)}-1}{(1+i)^{-m}-1}\right]\right\}$$

$$B = \frac{G[(1+i)^{m}-1]}{i(1+i)^{m}[(1+i)^{-m}-1]}\left\{(z-1)(1+i)^{-zm}-(1+i)^{-m}\left[\frac{(1+i)^{-m(z-1)}-1}{(1+i)^{-m}-1}\right]\right\}$$

$$B = \frac{G[(1+i)^{m}-1]}{i[1-(1+i)^{-m}]}\left\{(z-1)(1+i)^{-zm}-(1+i)^{-m}\left[\frac{(1+i)^{-m(z-1)}-1}{(1+i)^{-m}-1}\right]\right\}$$

$$B = \frac{G}{i}\left\{\frac{(1+i)^{-m(z-1)}-1}{(1+i)^{m}[(1+i)^{-m}-1]}-\frac{z-1}{(1+i)^{zm}}\right\}$$

$$B = \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^{-m(z-1)}-1}{1-(1+i)^{m}}-\frac{z-1}{(1+i)^{zm}}\right]$$

$$C = \frac{(R+zG)FAS_{i;x}}{(1+i)^{zm}} = \frac{RFAS_{i;x}}{(1+i)^{zm}}+\frac{zG\,FAS_{i;x}}{(1+i)^{zm}}$$

$$C = R\left[\frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^x(1+i)^{zm}}\right] + zG\left[\frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^x(1+i)^{zm}}\right]$$

$$C = R\left[\frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^n}\right] + zG\left[\frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$P = A + B + C$$

$$P = \frac{R}{i}[1-(1+i)^{-zm}] + \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^{-m(z-1)} - 1}{1-(1+i)^m} - \frac{z-1}{(1+i)^{zm}}\right] + R\left[\frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^n}\right] + zG\left[\frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$P = \frac{R}{i}\left[1-(1+i)^{-zm} + \frac{(1+i)^x - 1}{i(1+i)^n}\right] + \frac{G}{i}\left\{\frac{(1+i)^{-m(z-1)} - 1}{1-(1+i)^m} - \frac{z-1}{(1+i)^{zm}} + z\left[\frac{(1+i)^x - 1}{(1+i)^n}\right]\right\}$$

$$P = \frac{R}{i}\left[1-\frac{1}{(1+i)^{zm}} + \frac{(1+i)^x}{(1+i)^n} - \frac{1}{(1+i)^n}\right] + \frac{G}{i}\left\{\frac{(1+i)^{-m(z-1)} - 1}{1-(1+i)^m} - \frac{z-1}{(1+i)^{zm}} + z\left[\frac{(1+i)^x - 1}{(1+i)^n}\right]\right\}$$

$$P = \frac{R}{i}\left[1-\frac{1}{(1+i)^{zm}} + \frac{1}{(1+i)^{zm}} - \frac{1}{(1+i)^n}\right] + \frac{G}{i}\left\{\frac{(1+i)^{-m(z-1)} - 1}{1-(1+i)^m} - \frac{z-1}{(1+i)^{zm}} + z\left[\frac{(1+i)^x - 1}{(1+i)^n}\right]\right\}$$

$$\boxed{P = \frac{R}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right] + \frac{G}{i}\left\{\frac{(1+i)^{-m(z-1)} - 1}{1-(1+i)^m} - \frac{z-1}{(1+i)^{zm}} + z\left[\frac{(1+i)^x - 1}{(1+i)^n}\right]\right\}} \quad \textit{(6.10)}$$

La fórmula (6.10) calcula el valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en un gradiente aritmético cada m número de rentas.

Fórmula de la cuota base de una anualidad cuyas rentas varían en un gradiente aritmético cada m número de rentas
La demostración de esta fórmula se realiza a continuación.

$$\frac{R}{i}\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}\right] = P - \frac{G}{i}\left\{\frac{(1+i)^{-m(z-1)} - 1}{1-(1+i)^m} - \frac{z-1}{(1+i)^{zm}} + z\left[\frac{(1+i)^x - 1}{(1+i)^n}\right]\right\}$$

$$R = \left\{P - \frac{G}{i}\left\{\frac{(1+i)^{-m(z-1)} - 1}{1-(1+i)^m} - \frac{z-1}{(1+i)^{zm}} + z\left[\frac{(1+i)^x - 1}{(1+i)^n}\right]\right\}\right\}\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$R = \left\{P - \frac{G}{i}\left\{\frac{1-(1+i)^{-m(z-1)}}{(1+i)^m - 1} - \frac{z-1}{(1+i)^{zm}} + z\left[\frac{(1+i)^x - 1}{(1+i)^n}\right]\right\}\right\}\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$E = z\left[\frac{(1+i)^x - 1}{(1+i)^n}\right] - \frac{z-1}{(1+i)^{zm}} = \frac{z[(1+i)^x - 1](1+i)^{zm} - (z-1)(1+i)^n}{(1+i)^n(1+i)^{zm}}$$

$$E = \frac{z[(1+i)^x - 1](1+i)^{zm} - z(1+i)^n + (1+i)^n}{(1+i)^{n+zm}}$$

$$E = \frac{z[(1+i)^{zm+x} - (1+i)^{zm} - (1+i)^n] + (1+i)^n}{(1+i)^{n+zm}}$$

$$E = \frac{(1+i)^n - z(1+i)^{zm}}{(1+i)^{n+zm}}$$

$$R = \left\{P - \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{m(1-z)}}{(1+i)^m - 1} + \frac{(1+i)^n - z(1+i)^{zm}}{(1+i)^{n+zm}}\right]\right\}\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$R=\left\{P-\frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{m(1-z)}}{(1+i)^m-1}+\frac{1}{(1+i)^{zm}}-\frac{z}{(1+i)^n}\right]\right\}\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$$

$$\boxed{R=\left\{P-\frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{m(1-z)}}{(1+i)^m-1}+(1+i)^{-zm}-z(1+i)^{-n}\right]\right\}\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]} \quad (6.11)$$

La formula (6.11) calcula la cuota base de una anualidad cuyas rentas varían en un gradiente aritmético cada m número de rentas.

Ejemplo 6.15
Un préstamo que devenga una TEM de 0,02 se amortiza en el plazo de 11 meses con cuotas uniformes mensuales vencidas de 100 um; estas cuotas se incrementan en 10 um después de cada 4 cuotas; es decir en la cuota 5 y en la cuota 9. Calcule el importe del préstamo.

Solución
Para solucionar este problema se tienen los siguientes datos:

n = 11 número de rentas de la anualidad.

m = 4 número de cuotas uniformes en los z primeros sub horizontes

z = 2 cociente entero de $\frac{n}{m}$.

x = 3 residuo de $\frac{n}{m}$.

R = 100 cuota base de la anualidad.

G = 10 gradiente de la m+1 ésima cuota, que varía cada m-ésimo sub horizonte.

Al aplicar la fórmula 6.10, se tiene:

$$P=\frac{R}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}\right]+\frac{G}{i}\left\{\frac{(1+i)^{-m(z-1)}-1}{1-(1+i)^m}-\frac{z-1}{(1+i)^{zm}}+z\left[\frac{(1+i)^x-1}{(1+i)^n}\right]\right\}$$

$$P=\frac{100}{0{,}02}\left[\frac{1{,}02^{11}-1}{1{,}02^{11}}\right]+\frac{10}{0{,}02}\left\{\frac{1{,}02^{-4(2-1)}-1}{1-1{,}02^4}-\frac{2-1}{1{,}02^{2\times 4}}+2\left[\frac{1{,}02^3-1}{1{,}02^{11}}\right]\right\}$$

$P=1\ 063{,}09$

Comprobación: se puede comprobar el importe anterior si se descuentan los importes de las 11 cuotas hacia el momento cero, con la TEM=0,02.

$$P=\frac{100}{1{,}02^1}+\frac{100}{1{,}02^2}+\frac{100}{1{,}02^3}+\frac{100}{1{,}02^4}+\frac{110}{1{,}02^5}+\frac{110}{1{,}02^6}+\frac{110}{1{,}02^7}+\frac{110}{1{,}02^8}+\frac{120}{1{,}02^9}+\frac{120}{1{,}02^{10}}+\frac{120}{1{,}02^{11}}$$

$P=1\ 063{,}09$

Ejemplo 6.16
Un préstamo de 6 000 um que devenga una TEM de 0,02 debe amortizarse con cuotas mensuales vencidas que se incrementan en 50 um después de cada 2 meses. Calcule el importe de la cuota base, si el préstamo debe cancelarse en el plazo de 9 meses.

Solución
Se tienen los siguientes datos:

n = 9 número de rentas de la anualidad.

m = 2 número de cuotas uniformes en los z primeros sub horizontes.

z = 4 cociente entero de $\frac{n}{m}$.
x = 1 residuo de $\frac{n}{m}$.

P = 6 000 importe del préstamo.

G = 50 gradiente de la m+1 ésima cuota, que varía cada m-ésimo sub horizonte.

i = 0,02 tasa efectiva del período de renta, en el presente caso TEM.

Al aplicar la fórmula 6.11, se tiene:

$$R = \left\{P - \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{m(1-z)}}{(1+i)^m - 1} + (1+i)^{-zm} - z(1+i)^{-n}\right]\right\}\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$R = \left\{6\ 000 - \frac{50}{0{,}02}\left[\frac{1-1{,}02^{2\times(1-4)}}{1{,}02^2 - 1} + 1{,}02^{-4\times 2} - 4 \times 1{,}02^{-9}\right]\right\}\left[\frac{0{,}02 \times 1{,}02^9}{1{,}02^9 - 1}\right]$$

$$R = \{6\ 000 - 2\ 500[2{,}772985589 + 0{,}853490371 - 3{,}347021064]\}[0{,}122515437]$$

$$R = \{6\ 000 - 698{,}6372428\}[0{,}122515437]$$

$$R = \{5\ 301{,}362757\}[0{,}122515437]$$

$$R = 649{,}50$$

Comprobación: se puede comprobar el importe de la renta anterior si se formula un cuadro de servicio de la deuda como se muestra a continuación.

Nº	Cuota	C. Principal	C. Interés	Saldo
0				6000,00
1	649,50	529,50	120,00	5470,50
2	649,50	540,09	109,41	4930,41
3	699,50	600,89	98,61	4329,52
4	699,50	612,91	86,59	3716,61
5	749,50	675,17	74,33	3041,45
6	749,50	688,67	60,83	2352,78
7	799,50	752,44	47,06	1600,33
8	799,50	767,49	32,01	832,84
9	849,50	832,84	16,66	0,00
	6645,49	6000,00	645,49	

Observe que la cuota base de 649,50 um que crece en G=50 después de cada dos cuotas, permite amortizar el préstamo de 6 000 um que devenga una TEM de 0,02.

6.9 Cuotas variables geométricamente cada m número de rentas

En forma general, el caso de una anualidad cuyos períodos de rentas son uniformes y crecen (varían) en progresión geométrica cada m número de rentas, se representa en la figura 6.17.

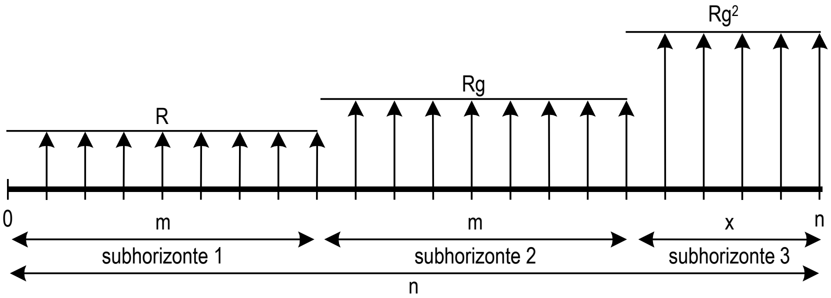


Figura 6.17 Anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cada m número de rentas.

Puede observar en el gráfico 6.17, que el número de rentas del último subhorizonte, es diferente al número de rentas de todos los subhorizontes anteriores. Sobre la base de los supuestos anteriores y dado:

n	Número total de cuotas, donde $n = mz + x$.
m	Número de cuotas uniformes de los z-1 primeros subhorizontes temporales.
z	Cociente entero de $\frac{n}{m}$.
x	Residuo de $\frac{n}{m}$.
P	Importe del préstamo.
g	Razón de variación de cuotas en cada sub-horizonte.
R	Cuota base.

Los subhorizontes temporales anteriores al último tienen m cuotas uniformes. El último subhorizonte tiene m cuotas sólo si $\frac{n}{m}$ es entero; de lo contrario tiene x cuotas.

Fórmula de la renta uniforme del primer subhorizonte de una anualidad cuyas rentas varían geométricamente cada m número de rentas

$$P = R.FAS_{i;m} + \frac{Rg.FAS_{i;m}}{(1+i)^m} + \frac{Rg^2.FAS_{i;m}}{(1+i)^{2m}} + \cdots + \frac{Rg^{z-1}.FAS_{i;m}}{(1+i)^{(z-1)m}} + \frac{Rg^z.FAS_{i;x}}{(1+i)^{zm}} \quad (1)$$

$$P = R\left\{FAS_{i;m} + FAS_{i;m}\frac{g}{(1+i)^m} + FAS_{i;m}\left[\frac{g}{(1+i)^m}\right]^2 + \cdots + FAS_{i;m}\left[\frac{g}{(1+i)^m}\right]^{z-1} + \frac{g^z FAS_{i;x}}{(1+i)^{zm}}\right\} \quad (2)$$

$$P = R\left\{FAS_{i;m} + \left\{\frac{\left[\frac{g}{(1+i)^m}\right]^z - 1}{\frac{g}{(1+i)^m} - 1}\right\} + \frac{g^z FAS_{i;x}}{(1+i)^{zm}}\right\} \quad (3)$$

$$P = R\left\{\frac{(1+i)^m-1}{i(1+i)^m}\left[\frac{\frac{g^z-(1+i)^{zm}}{(1+i)^{zm}}}{\frac{g-(1+i)^m}{(1+i)^m}}\right] + \frac{g^z}{(1+i)^{zm}}\left[\frac{(1+i)^x-1}{i(1+i)^x}\right]\right\} \quad (4)$$

$$P = R\left\{\frac{[(1+i)^m-1][g^z-(1+i)^{zm}]}{i[g-(1+i)^m](1+i)^{zm}} + \frac{g^z[(1+i)^x-1]}{i(1+i)^{zm}(1+i)^x}\right\} \quad (5)$$

$$P = \frac{R}{i(1+i)^{zm}}\left\{\frac{[(1+i)^m-1][g^z-(1+i)^{zm}]}{g-(1+i)^m} + \frac{g^z[(1+i)^x-1]}{(1+i)^x}\right\} \quad (6)$$

$$P = \frac{R}{i(1+i)^{zm}}\left\{\frac{(1+i)^x[(1+i)^m-1][g^z-(1+i)^{zm}] + g^z[(1+i)^x-1][g-(1+i)^m]}{[g-(1+i)^m](1+i)^x}\right\} \quad (7)$$

$$P = \frac{R}{i(1+i)^{zm+x}}\left\{\frac{(1+i)^x[(1+i)^m-1][g^z-(1+i)^{zm}] + g^z[(1+i)^x-1][g-(1+i)^m]}{g-(1+i)^m}\right\} \quad (8)$$

$$P = \frac{R}{i(1+i)^n}\left\{\frac{(1+i)^x[(1+i)^m-1][g^z-(1+i)^{zm}]+g^z[(1+i)^x-1][g-(1+i)^m]}{g-(1+i)^m}\right\} \quad (9)$$

$$R = \frac{Pi(1+i)^n[g-(1+i)^m]}{(1+i)^x[(1+i)^m-1][g^z-(1+i)^{zm}]+g^z[(1+i)^x-1][g-(1+i)^m]} \quad (10)$$

La expresión de la ecuación (10) también puede representarse como se muestra en la fórmula (6.12), que calcula el importe de la renta uniforme del primer sub horizonte de una anualidad, cuyas rentas varían geométricamente cada m número de rentas.

$$\boxed{R = P\left[\frac{i(1+i)^n[(1+i)^m-g]}{(1+i)^x[(1+i)^m-1][(1+i)^{zm}-g^z]+g^z[(1+i)^x-1][(1+i)^m-g]}\right]} \quad (6.12)$$

Ejemplo 6.17
Un préstamo de 10 000 um que devenga una TEM de 0,015 se otorgó para amortizarse en el plazo de 10 meses con cuotas uniformes mensuales vencidas, que se incrementarán 12% después de cada 3 rentas uniformes mensuales consecutivas. Calcule el importe de la renta uniforme del primer subhorizonte, y la de los siguientes subhorizontes que componen el horizonte temporal de la anualidad.

SOLUCIÓN
Se tienen los siguientes datos:

n = 10 número de rentas de la anualidad.

m = 3 número de cuotas uniformes en los z-1 primeros sub horizontes.

z = 3 cociente entero de $\frac{n}{m}$.

x = 1 residuo de $\frac{n}{m}$.

P = 10 000 importe del préstamo.

g = 1,12 razón de variación de cuotas en cada sub-horizonte.

i = 0,015 tasa efectiva del período de renta, en el presente caso TEM.

Al aplicar la fórmula 6.12, se tiene:

$$R = P\left[\frac{i(1+i)^n[(1+i)^m-g]}{(1+i)^x[(1+i)^m-1][(1+i)^{zm}-g^z]+g^z[(1+i)^x-1][(1+i)^m-g]}\right]$$

$$R = 10\,000\left[\frac{0{,}015\times 1{,}015^{10}[1{,}015^3-1{,}12]}{1{,}015^1(1{,}015^3-1)[1{,}015^{3\times 3}-1{,}12^3]+1{,}12^3[1{,}015^1-1][1{,}015^3-1{,}12]}\right]$$

$$R = 10\,000\left[\frac{-0{,}0012937992}{0{,}0463635506\times -0{,}2615380246+0{,}02107392\times -0{,}074321625}\right]$$

$$R = 10\,000\left[\frac{-0{,}0012937992}{-0{,}0136920794}\right]$$

$$R = 10\,000 \times 0{,}094492528$$

$$R = 944{,}93$$

A partir de la renta del primer subhorizonte cuyo importe es 944,93 um, se calculan las demás rentas de la anualidad, que se incrementan en 12% cada 3 meses; como se muestra en la siguiente tabla de servicio de la deuda.

Nº	Cuota	C. Princ.	C. Interés	Saldo
0				10000,0
1	944,93	794,93	150,00	9205,07
2	944,93	806,85	138,08	8398,23
3	944,93	818,95	125,97	7579,27
4	1058,32	944,63	113,69	6634,65
5	1058,32	958,80	99,52	5675,85
6	1058,32	973,18	85,14	4702,67
7	1185,31	1114,77	70,54	3587,90
8	1185,31	1131,50	53,82	2456,40
9	1185,31	1148,47	36,85	1307,93
10	1327,55	1307,93	19,62	0,00
	10893,22	10000,00	893,22	

6.10 Modelos de anualidades de gradientes con Excel

A continuación se presentan problemas de anualidades de gradientes resueltos en forma tradicional, y con modelos implementados en una hoja de Excel, en los cuales se utilizan las Funciones Financieras Personalizadas (FFP).

Valor presente de una anualidad de gradientes uniformes convencionales FASG

1. El primer flujo de caja trimestral de un proyecto de inversión que tiene una vida útil de 5 años, es 10 000 um. Si los demás flujos de caja se incrementan en 500 um trimestralmente, calcule el FAS, el FASG, y el valor presente de los ingresos del proyecto, con una TET de 0,05.

Solución
Con los datos CB=10 000; G=500; n=20 y TET=0,05; se calcula P.

a. Valor presente de las cuotas bases.

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] \qquad P_1 = 10\,000\left[\frac{1{,}05^{20}-1}{0{,}05\times 1{,}05^{20}}\right]$$

$$P_1 = 10\,000 \times 12{,}46221034 = 124\,622{,}10$$

b. Valor presente de la anualidad de los gradientes uniformes convencionales con la fórmula (6.1).

$$P_G = G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]\right\} \qquad P_G = 500\left\{\frac{1}{0{,}05}\left[\frac{1{,}05^{20}-1}{0{,}05\times 1{,}05^{20}} - \frac{20}{1{,}05^{20}}\right]\right\}$$

$$P_G = 500\{20[12{,}46221034 - 7{,}537789657]\}$$

$$P_G = 500 \times 98{,}48841371 = 49\,244{,}21$$

c. Valor presente de la anualidad cuyas rentas varían en progresión aritmética.

$$P = P_1 + P_G \qquad P = 124\,622{,}10 + 49\,244{,}21 = 173\,866{,}31$$

La figura 6.18 muestra el modelo 6.1 que obtiene el FAS, FASG y el valor presente de una anualidad con gradientes aritméticos convencionales.

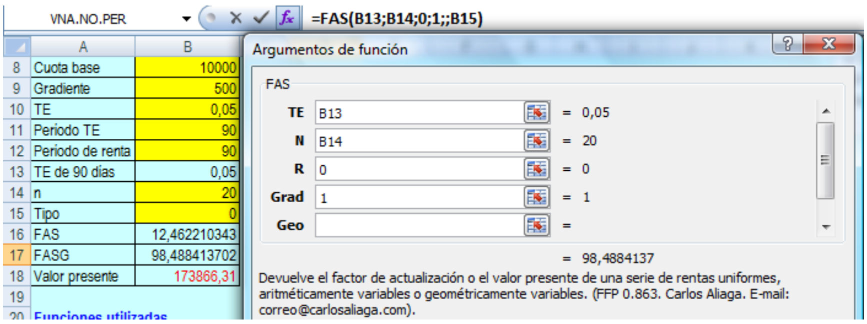


Figura 6.18 Modelo 6.1 Valor presente de una anualidad con gradiente aritmético convencional positivo.

Gradientes uniformes convencionales negativos

2. Un proyecto de inversión se formula para reducir sus costos de operación durante sus cuatro años de vida útil. El primer flujo de caja trimestral se estima en 5 000 um y los demás flujos de costos trimestrales disminuyan en 100 um hasta el final del proyecto. Con una TET de 0,04 calcule el valor actual de los costos del proyecto.

Solución
Con los datos CB=5 000; G=100; n=16 y TET=0,04; se calcula P.

a. Valor presente de las cuotas bases.

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] \qquad P_1 = 5\,000\left[\frac{1{,}04^{16}-1}{0{,}04\times 1{,}04^{16}}\right]$$

$$P_1 = 5\,000 \times 11{,}65229561 = 58\,261{,}48$$

b. Valor presente de la anualidad de los gradientes uniformes convencionales con la fórmula (6.1).

$$P_G = G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]\right\} \qquad P_G = 100\left\{\frac{1}{0{,}04}\left[\frac{1{,}04^{16}-1}{0{,}04\times 1{,}04^{16}} - \frac{16}{1{,}04^{16}}\right]\right\}$$

$$P_G = 100\{25[11{,}65229561 - 8{,}542530811]\}$$

$$P_G = 100 \times 77{,}74411992 = 7\,774{,}41$$

c. Valor presente de la anualidad cuyas rentas varían en progresión aritmética.

$$P = P_1 + P_G \qquad P = 58\,261{,}48 - 7\,774{,}41 = 50\,487{,}07$$

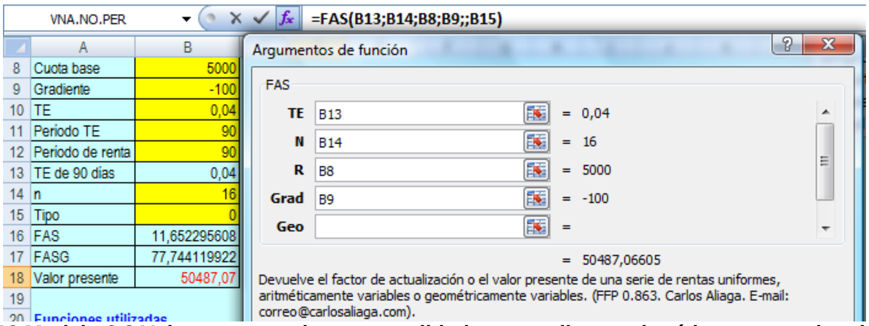


Figura 6.19 Modelo 6.2 Valor presente de una anualidad con gradiente aritmético convencional negativo.

Valor presente de una anualidad de gradientes uniformes desfasados

3. Los flujos de caja semestrales vencidos (en miles de um), de un proyecto de inversión que tiene cinco años de vida útil, son los que se muestran a continuación. Calcule el valor actual de esos flujos con una TEA de 0,1664.

Semestre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
FC	100	100	100	105	110	115	120	125	130	135

Solución

Con los datos CB=100; G=5; n=10; n’=8; n’’=2 y TES=0,08; se calcula P.

a. Valor presente de las cuotas bases.

$$P = R\left[\frac{(1+i)^{n'}-1}{i(1+i)^{n'}}\right] \qquad P_1 = 100\left[\frac{1{,}08^{10}-1}{0{,}08\times 1{,}08^{10}}\right]$$

$$P_1 = 100 \times 6{,}710081399 = 671{,}01$$

b. Valor presente de la anualidad de los gradientes uniformes desfasados.

$$P_G = G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^{n'}-1}{i(1+i)^{n'}} - \frac{n'}{(1+i)^{n'}}\right](1+i)^{-n''}\right\}$$

$$P_G = 5\left\{\frac{1}{0{,}08}\left[\frac{1{,}08^{8}-1}{0{,}08\times 1{,}08^{8}} - \frac{8}{1{,}08^{8}}\right]1{,}08^{-2}\right\}$$

$$P_G = 5\{12{,}5[5{,}746638944 - 4{,}32151076] \times 0{,}85733882\}$$

$$P_G = 5 \times 15{,}26585935 = 76{,}33$$

c. Valor presente de la anualidad cuyas rentas varían en progresión aritmética con gradientes uniformes desfasados.

$$P = P_1 + P_G \qquad P = 671{,}01 + 76{,}33 = 747{,}34$$

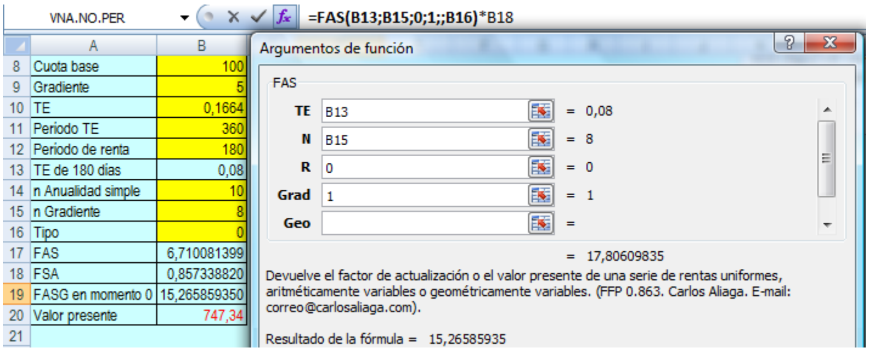


Figura 6.20 Modelo 6.3 Valor presente de una anualidad con gradientes uniformes desfasados.

4. Con una TES (semestral) de 0,0609 calcule el valor actual de los siguientes flujos de caja trimestrales vencidos.

Trimestre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
FC	2 000	2 000	2 000	2 000	1 990	1 980	1 970	1 960	1 950	1 940

Solución
Con los datos CB=2 000; G=-10; n=10; n’=7; n’’=3 y TET=0,03; se calcula P.

a. Valor presente de las cuotas bases.

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] \qquad P = 2\,000\left[\frac{1{,}03^{10}-1}{0{,}03\times 1{,}03^{10}}\right]$$

$$P = 2\,000 \times 8{,}530202837 = 17\,060{,}41$$

b. Valor presente de la anualidad de los gradientes uniformes desfasados.

$$P_G = G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^{n'}-1}{i(1+i)^{n'}} - \frac{n'}{(1+i)^{n'}}\right](1+i)^{-n''}\right\}$$

$$P_G = -10\left\{\frac{1}{0{,}03}\left[\frac{1{,}03^7-1}{0{,}03\times 1{,}03^7} - \frac{7}{1{,}03^7}\right]1{,}03^{-3}\right\}$$

$$P_G = -10\{33{,}\hat{3}[6{,}230282955 - 5{,}691640579] \times 0{,}915141659\}$$

$$\mathrm{P_G} = -10 \times 16{,}43113592 = -164{,}31$$

c. Valor presente de la anualidad cuyas rentas varían en progresión aritmética con gradientes uniformes desfasados negativos.

$$P = P_1 + P_G \qquad P = 17\,060{,}41 - 164{,}31 = 16\,896{,}09$$

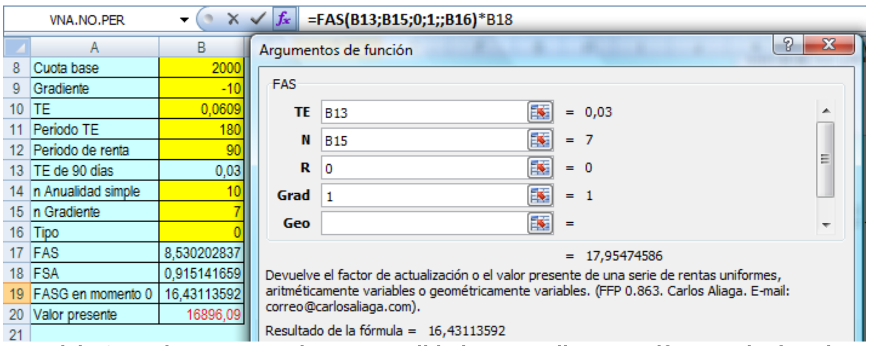


Figura 6.21 Modelo 6.4 Valor presente de una anualidad con gradientes uniformes desfasados negativos.

Renta uniforme de anualidad de gradientes uniformes FRCG

5. Una deuda debe pagarse en el plazo de 10 meses con cuotas uniformes mensuales vencidas; la primera de

400 um y las siguientes se incrementan mensualmente en 50 um. Con una TEB (bimestral) de 0,0404 convierta esa anualidad con gradientes uniformes, en una anualidad equivalente con cuotas uniformes mensuales vencidas.

Solución

Con los datos CB=400; G=50; n=10 y TEM=0,02; se calcula la R_1 equivalente.

a. Renta uniforme vencida equivalente de una anualidad de gradientes uniformes con la fórmula (6.2).

$$R_G = G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad R_G = 50\left[\frac{1}{0{,}02} - \frac{10}{1{,}02^{10} - 1}\right]$$

$$R_G = 50 \times 4{,}336736066 = 216{,}84$$

b. Renta uniforme equivalente de las rentas de la anualidad con gradientes.

$$R_1 = CB + R \qquad R_1 = 400 + 216{,}84 = 616{,}84$$

B14 =B13*B8*(2+B12*(B13-1))/(2*(1+B12*B13))

	A	B	D	E	F	G	H	I	J	K
8	Renta uniforme	27634,66	k	R	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
9	TN	0,18	0				100000,00		100000,00	
10	Periodo TN	360	1	27634,66	27634,66	0,00	72365,34	4500,00	76865,34	4500,00
11	Periodo de renta	90	2	27634,66	27634,66	0,00	44730,68	7756,44	52487,12	3256,44
12	TN de 90 días	0,045	3	27634,66	27634,66	0,00	17096,02	9769,32	26865,34	2012,88
13	n	4	4	27634,66	17096,02	10538,64	0,00	0,00	0,00	769,32
14	Valor presente	100000,00		**110538,64**	**100000,00**	**10538,64**				**10538,64**

Figura 6.22 Modelo 6.5 Renta uniforme equivalente de las rentas de una anualidad con gradientes uniformes.

6. Con una TET de 0,061208 convierta una anualidad de 12 rentas mensuales cuya cuota base es 3 000 um y luego disminuye en 100 um en cada mes; en una anualidad con rentas mensuales uniformes vencidas.

Solución

Con los datos CB=3 000; G=-100; n=12 y TEM=0,02; se calcula la R_1 equivalente.

VNA.NO.PER =FRCG(B13;B14;B8;B9)

	A	B
8	Cuota Base	3000
9	Gradiente	-100
10	TE	0,061208
11	Periodo TE	90
12	Periodo de renta	30
13	TE de 30 días	0,02
14	n	12
15	Tipo	0
16	FRCG	5,264242
17	Renta uniforme	2473,58
18		

Argumentos de función

FRCG

TE B13 = 0,02

N B14 = 12

CuotaBase B8 = 3000

Grad B9 = -100

= 2473,575797

Devuelve el factor que aplicado sobre el gradiente obtiene la cuota uniforme de una anualidad equivalente a la anualidad de los gradientes, o la cuota uniforme equivalente a una anualidad cuyas rentas varían aritméticamente.

Figura 6.23 Modelo 6.6 Renta uniforme equivalente de las rentas de una anualidad con gradientes uniformes negativos.

a. Renta uniforme vencida equivalente de una anualidad de gradientes uniformes con la fórmula (6.2).

$$R_G = G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad R_G = -100\left[\frac{1}{0{,}02} - \frac{12}{1{,}02^{12} - 1}\right]$$

$$R_G = -100 \times 5{,}264242026 = -526{,}42$$

b. Renta uniforme equivalente de las rentas de la anualidad con gradientes.

$$R_1 = CB + R \qquad R_1 = 3\,000 - 526{,}42 = 2\,473{,}58$$

Valor futuro de una anualidad de gradientes uniformes convencionales FCSG

7. ¿Qué monto puede acumularse en el plazo de dos años con depósitos mensuales vencidos cuya cuota base es 100 um que devengan una TEM de 0,01? Esta cuota base se incrementa cada mes en 5 um.

Solución
Con los datos CB=100; G=5; n=24 y TEM=0,01; se calcula el monto de la anualidad con gradiente.

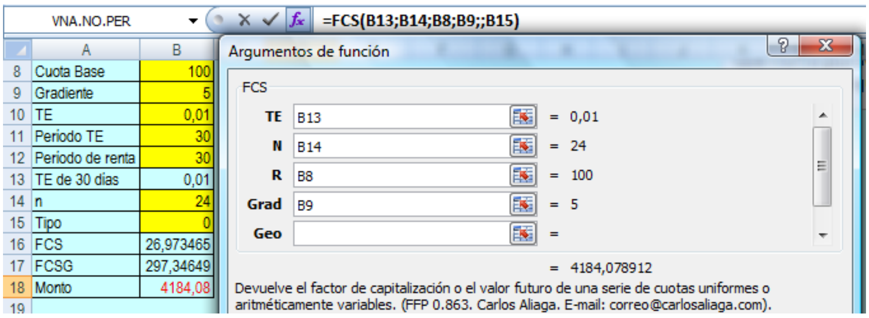


Figura 6.24 Modelo 6.7 Valor futuro de una anualidad con gradientes uniformes.

a. Cálculo del valor futuro de las cuotas bases.

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \qquad S_1 = 100\left[\frac{1{,}01^{24}-1}{0{,}01}\right]$$

$$S_1 = 100 \times 26{,}97346485 = 2\,697{,}35$$

b. Cálculo del valor futuro de la anualidad de gradientes uniformes convencionales con la fórmula (6.3).

$$S_G = G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i} - n\right]\right\} \qquad S_G = 5\left\{\frac{1}{0{,}01}\left[\frac{1{,}01^{24}-1}{0{,}01} - 24\right]\right\}$$

$$S_G = 5\{100[26{,}97346485 - 24]\} = 5 \times 297{,}3464853 = 1\,486{,}73$$

c. Cálculo del valor futuro de la anualidad con gradientes uniformes convencionales.

$$S = S_1 + S_G \qquad S = 2\,697{,}35 + 1\,486{,}73 = 4\,184{,}08$$

8. Durante un período anual, una persona deposita cada 30 días un importe que disminuye en 20 um en cada período mensual. El primer depósito es 300 um y con una TET de 0,030301 calcule el monto de esta anualidad vencida.

Solución
Con los datos CB=300; G=-20; n=12 y TEM=0,01; se calcula el monto de la anualidad con gradiente.

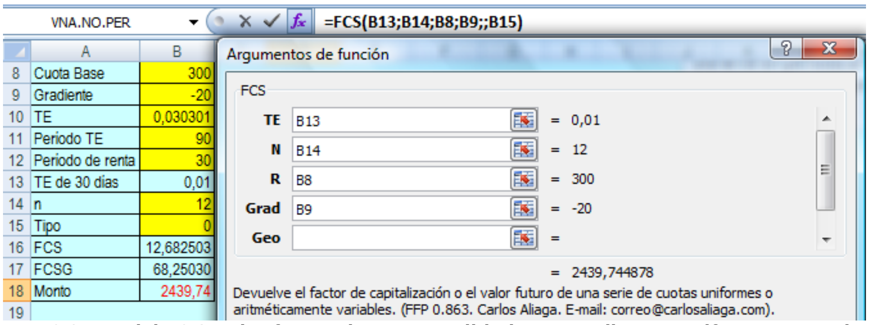


Figura 6.25 Modelo 6.8 Valor futuro de una anualidad con gradientes uniformes negativos.

a. Cálculo del valor futuro de las cuotas bases.

$$S = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \qquad S_1 = 300\left[\frac{1{,}01^{12}-1}{0{,}01}\right]$$

$$S_1 = 300 \times 12{,}68250301 = 3\,804{,}75$$

b. Cálculo del valor futuro de la anualidad de gradientes uniformes convencionales negativos.

$$S_G = G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i} - n\right]\right\} \qquad S_G = -20\left\{\frac{1}{0{,}01}\left[\frac{1{,}01^{12}-1}{0{,}01} - 12\right]\right\}$$

$$S_G = -20\{100 \times [12{,}68250301 - 12]\} = -20 \times 68{,}2503013 = -1\,365$$

c. Cálculo del valor futuro de la anualidad con gradientes uniformes convencionales.

$$S = S_1 + S_G \qquad S = 3\,804{,}75 - 1\,365 = 2\,439{,}74$$

Valor futuro de gradientes uniformes desfasados

9. Calcule el valor futuro al final de un período de dos años; en ese plazo se efectuarán depósitos mensuales vencidos de 300 um durante 6 meses y luego de ese período, las cuotas se incrementarán en 20 um en cada mes hasta el final del horizonte temporal. Los depósitos devengan una TEM de 0,02.

Solución

Con los datos CB=300; G=20; n=24; n'=19; TEM=0,02, se calcula el valor futuro de los gradientes uniformes convencionales desfasados y de las cuotas bases. El gradiente es desfasado porque se inicia en la cuota 13.

a. Cálculo del valor futuro de las cuotas bases.

$$S_1 = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \qquad S_1 = 300\left[\frac{1{,}02^{24}-1}{0{,}01}\right]$$

$$S_1 = 300 \times 30{,}42186247 = 9\,126{,}56$$

b. Cálculo del valor futuro de la anualidad de gradientes uniformes desfasados.

$$S_G = G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^{n'}-1}{i} - n\right]\right\} \qquad S_G = 20\left\{\frac{1}{0{,}02}\left[\frac{(1+0{,}02)^{19}-1}{0{,}02} - 19\right]\right\}$$

$$S_G = 20\{50[3{,}840558626]\} = 3\,840{,}56$$

c. Cálculo del valor futuro de la anualidad con gradientes uniformes desfasados.

$$S = S_1 + S_G$$

$$S = 9\,126{,}56 + 3\,840{,}56 = 12\,967{,}12$$

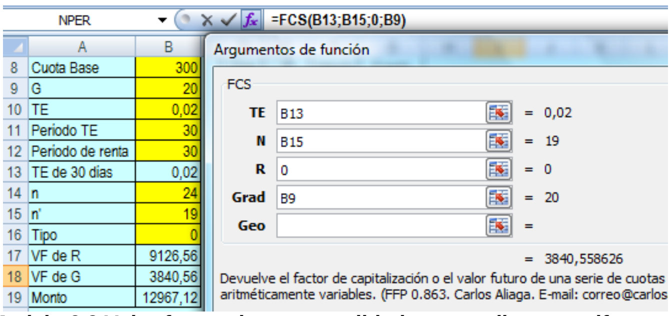


Figura 6.26 Modelo 6.9 Valor futuro de una anualidad con gradientes uniformes desfasados.

Valor presente de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando g≠(1+i) FASg

10. Calcule el importe de un préstamo que se amortiza con 10 cuotas mensuales vencidas, cuya cuota base es 200 um la cual se incrementa mensualmente con una tasa de 0,02. Utilice una TEM de 0,014.

Solución

Con los datos CB=200; g=1,02; n=10 y TEM=0,014; se calcula el valor presente de la anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica.

$$P_g = R\left\{\frac{1}{(1+i)^n} \times \left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right]\right\} \qquad P_g = 200\left\{\frac{1}{1{,}014^{10}} \times \left[\frac{1{,}02^{10}-1{,}014^{10}}{1{,}02-1-0{,}014}\right]\right\}$$

$$P_g = 200\{0{,}870202747 \times 11{,}63948925\} = 200 \times 10{,}12871552 = 2\,025{,}74$$

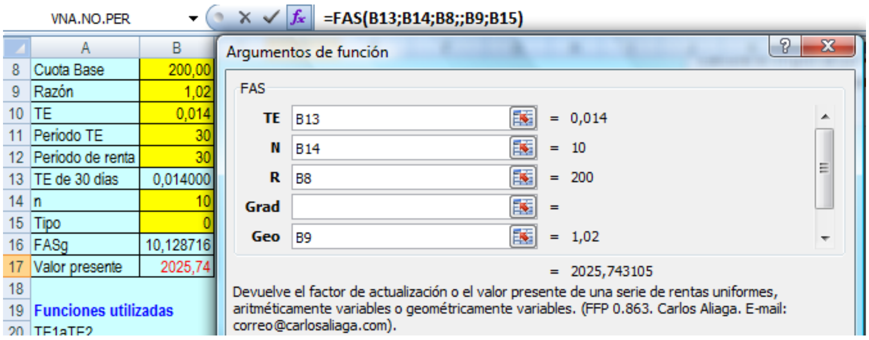


Figura 6.27 Modelo 6.10 Valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica.

11. Si la cuota base vencida de un préstamo es 8 000 um, la cual decrece con una tasa de 0,02 en cada cuota trimestral durante dos años, ¿cuál es el importe del préstamo, si devenga una TES (semestral) de 0,050625.

Solución

Con los datos CB=8 000; g=0,98; n=8 y TET=0,025; se calcula el valor presente de la anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica.

$$P_g = R\left\{\frac{1}{(1+i)^n} \times \left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right]\right\} \qquad P_g = 8\,000\left\{\frac{1}{1{,}025^{8}} \times \left[\frac{0{,}98^{8}-1{,}025^{8}}{0{,}98-1-0{,}025}\right]\right\}$$

$$P_g = 8\,000\{0{,}82074657 \times 8{,}169774998\} = 8\,000 \times 6{,}705314814 = 53\,642{,}52$$

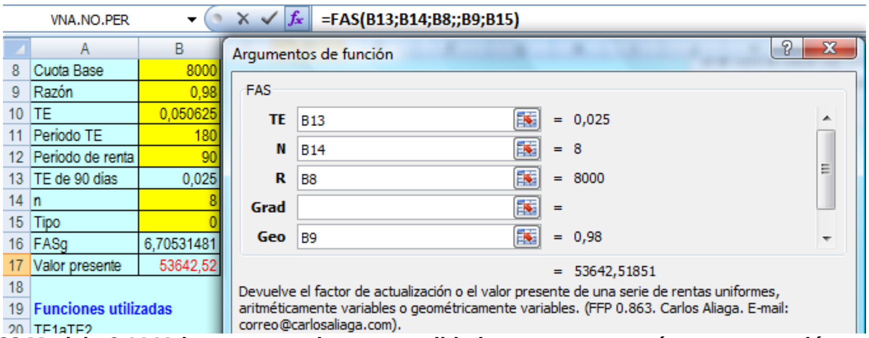


Figura 6.28 Modelo 6.11 Valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica.

Valor presente de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando g=(1+i) FASg

12. ¿Cuánto es el importe de un préstamo cuya cuota base vencida mensual de 1 000 um aumenta en una tasa de 0,02 cada mes? La anualidad es de 10 meses y la TET es 0,061208.

Solución

Con los datos CB=1 000; g=1,02; n=10 y TEM=0,02; se calcula el valor presente de la anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica y g=(1+i).

$$P_g = R\left[\frac{n}{g}\right] \qquad P_g = 1\,000\left[\frac{10}{1{,}02}\right] = 1\,000 \times 9{,}803921569 = 9\,803{,}92$$

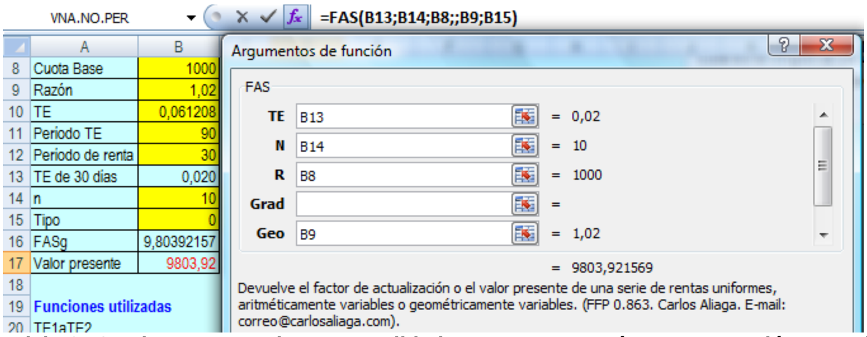


Figura 6.29 Modelo 6.12 Valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica cuando g=(1+i).

Cálculo de la cuota base de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando g≠(1+i)

13. Calcule el importe de la cuota base mensual vencida de un préstamo de 20 000 um que devenga una TEB de 0,0404. Esta cuota base se incrementa mensualmente con una tasa de 0,03. La anualidad tiene un plazo de 12 meses.

Solución

Con los datos P_g=20 000; g=1,03; n=12 y TEM=0,02; se calcula la cuota base o primera cuota de la anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica y g≠(1+i), fórmula (6.6).

$$R = P_g\left\{(1+i)^n\left[\frac{g-1-i}{g^n-(1+i)^n}\right]\right\} \qquad R = 20\,000\left\{1{,}02^{12}\left[\frac{1{,}03-1-0{,}02}{1{,}03^{12}-1{,}02^{12}}\right]\right\}$$

$$R = 20\,000\{1{,}12682503 \times 0{,}063484367\} = 20\,000 \times 0{,}080513528 = 1\,610{,}27$$

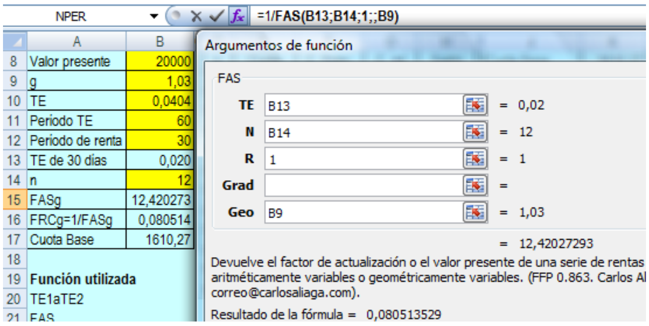


Figura 6.30 Modelo 6.13 Cuota base de una anualidad que varía en progresión geométrica cuando g≠(1+i). El FRCg se obtuvo como la inversa del FASg.

Cálculo de la cuota base de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando g=(1+i)

14. Un préstamo de 50 000 um que devenga una TEM de 0,015 debe cancelarse en el plazo de 18 meses, con cuotas uniformes vencidas mensuales que se incrementan en cada cuota con una tasa de 0,015. Calcule el importe de la primera cuota, o cuota base.

Solución

Con los datos P_g=50 000; TEM=0,015; g=1,015 y n=18 se calcula la cuota base.

$$R = P_g\left[\frac{g}{n}\right] \qquad R = 50\,000\left[\frac{1{,}015}{18}\right]$$

$$R = 50\,000 \times 0{,}056388888 = 2\,819{,}44$$

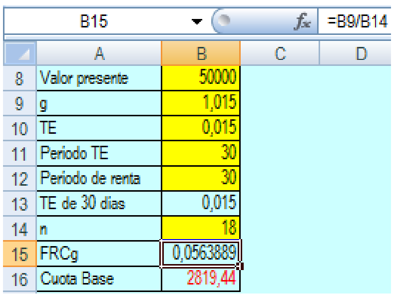


Figura 6.31 Modelo 6.14 Cuota base de una anualidad que varía en progresión geométrica cuando g=(1+i).

Valor futuro de anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando g≠(1+i)

15. Calcule el monto que se acumulará en el plazo de dos años con depósitos trimestrales vencidos y con una TEA de 0,08243216. El primer depósito o cuota base es 1 000 um y los siguientes se incrementan 10% cada trimestre.

Solución
Con los datos CB=1 000; TET=0,02; g=1,1 y n=8 se calcula el monto con la fórmula (6.8).

$S_g = R\left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right] \qquad S_g = 1\ 000\left[\frac{1{,}1^8-1{,}02^8}{1{,}1-1-0{,}02}\right]$

$S_g = 1\ 000\left[\frac{0{,}971929429}{0{,}08}\right] = 1\ 000 \times 12{,}14911786 = 12\ 149{,}12$

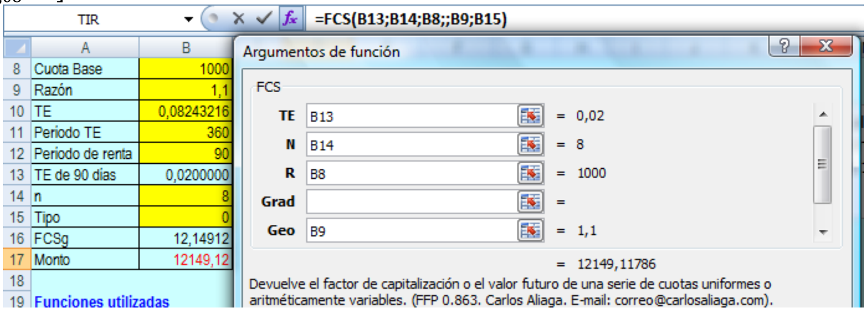


Figura 6.32 Modelo 6.15 Valor futuro de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica cuando g≠(1+i).

16. Un proyecto de inversión durante sus cinco años de vida útil, puede generar flujos de caja semestrales vencidos. El primer flujo se estima en 20 000 um y los siguientes decrecen en 15% cada trimestre. Con una TEA de 0,1664 calcule el valor futuro de los flujos de caja de ese proyecto.

Solución
Con los datos CB=20 000; TET=0,08; g=0,85 y n=10 se calcula el monto.

$S_g = R\left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right] \qquad S_g = 20\ 000\left[\frac{0{,}85^{10}-1{,}08^{10}}{0{,}85-1-0{,}08}\right]$

$S_g = 20\ 000\left[\frac{-1{,}962050593}{-0{,}23}\right] = 20\ 000 \times 8{,}530654752 = 170\ 613{,}1$

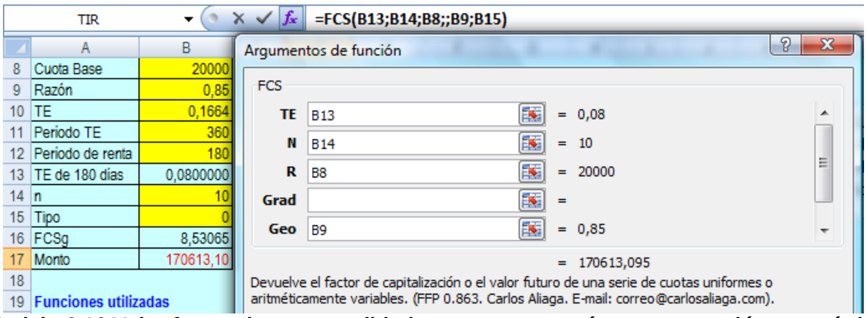


Figura 6.33 Modelo 6.16 Valor futuro de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica (decrecen) cuando g≠(1+i).

Valor futuro de anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando g=(1+i)

17. Con una TEM de 0,01 calcule el valor futuro de una anualidad con rentas bimestrales vencidas durante el período de un año. La primera renta es 1 000 um y en cada bimestre se incrementan 2,01%.

Solución
Con los datos CB=1 000; TEB=0,0201; g=1,0201 y n=6 se calcula el monto.

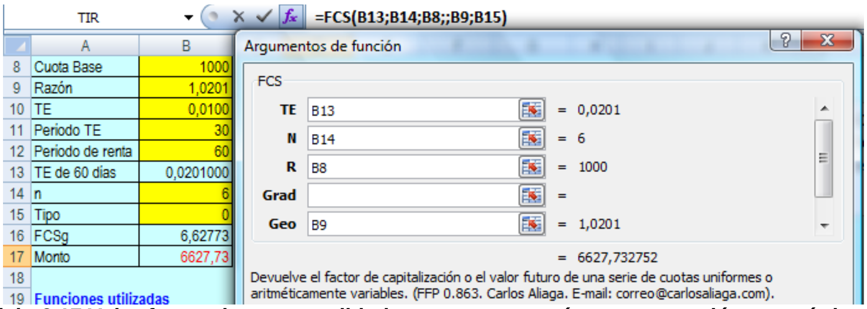


Figura 6.34 Modelo 6.17 Valor futuro de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica cuando g=(1+i).

$$S_g = R\left[\frac{n(1+i)^n}{g}\right] \qquad S_g = 1\,000\left[\frac{6 \times 1{,}0201^6}{1{,}0201}\right]$$

$$S_g = 1\,000 \times 6{,}627732752 = 6\,627{,}73$$

18. La primera renta trimestral vencida de una anualidad es 2 000 um. Esta renta decrece 3% en cada trimestre. Con una TET de 0,03 calcule el valor futuro de esta anualidad cuyo horizonte temporal es dos años.

Solución

Con los datos CB=2 000; TET=0,03; g=0,97 y n=8 se calcula el monto.

$$S_g = R\left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right] \qquad S_g = 2\,000\left[\frac{0{,}97^8-1{,}03^8}{0{,}97-1-0{,}03}\right]$$

$$S_g = 2\,000\left[\frac{-0{,}483026721}{-0{,}06}\right] = 2\,000 \times 8{,}050445366 = 16\,100{,}89$$

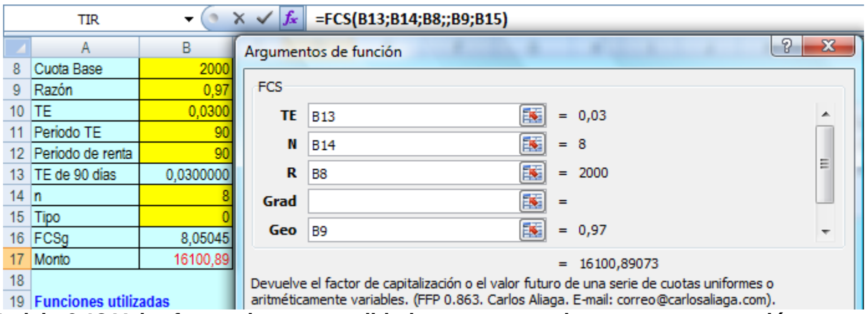


Figura 6.35 Modelo 6.18 Valor futuro de una anualidad cuyas rentas decrecen en progresión geométrica cuando g=(1+i).

Gradientes variables aritméticamente cada m número de rentas

19. Calcule el importe de un préstamo que devenga una TEM de 0,01 y debe amortizarse en el plazo de 10 meses con cuotas uniformes vencidas de 5 000 um. Estas cuotas deben incrementarse en 500 um después de cada dos cuotas; es decir en las cuotas 3, 5, 7 y 9.

Solución

Con los datos n =10; m = 2; z = 5 cociente entero de $\frac{n}{m}$; x = 0 residuo de $\frac{n}{m}$; R = 5 000; G = 500 y al aplicar la fórmula 6.10, se tiene:

$$P = \frac{R}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}\right] + \frac{G}{i}\left\{\frac{(1+i)^{-m(z-1)}-1}{1-(1+i)^m} - \frac{z-1}{(1+i)^{zm}} + z\left[\frac{(1+i)^x-1}{(1+i)^n}\right]\right\}$$

$$P = \frac{5\,000}{0{,}01}\left[\frac{1{,}01^{10}-1}{1{,}01^{10}}\right] + \frac{500}{0{,}01}\left\{\frac{1{,}01^{-2\times 4}-1}{1-1{,}01^2} - \frac{5-1}{1{,}01^{5\times 2}} + 5\left[\frac{1{,}01^0-1}{1{,}01^{10}}\right]\right\}$$

$$P = 53\,539{,}99$$

B22 | f_x =B18+B19*(B20+B21)

	A	B
8	R	5000
9	G	500
10	TE	0,02
11	Periodo TE	30
12	Periodo de pago	30
13	TE de30 dias	0,02
14	n	10
15	m	2
16	z	5
17	x	0
18	$\frac{R}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}\right]$	44912,93
19	$G \div i$	25000,0
20	$\frac{(1+i)^{-m(z-1)}-1}{1-(1+i)^m}-\frac{z-1}{(1+i)^{zm}}$	0,34508276
21	$z\left[\frac{(1+i)^x-1}{(1+i)^n}\right]$	0
22	VP	53539,99

	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
8	Cuota	1	3	5	7	9					
9	Importe	5000	5500	6000	6500	7000					
10	Meses	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	FC	5000	5000	5500	5500	6000	6000	6500	6500	7000	7000
12	VNA	53539,99									

Figura 6.36 Modelo 6.19 Valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en un gradiente aritmético cada m número de rentas.

Cuota base de una anualidad cuyas rentas varían en un gradiente aritmético cada m número de rentas

20. Un préstamo de 86 352,88 um que devenga una TEM de 0,01 debe amortizarse con cuotas mensuales vencidas que se incrementan en 100 um después de cada 3 meses. Calcule el importe de la cuota base, si el préstamo debe cancelarse en el plazo de 10 meses.

Solución

Con los datos n =10; m = 3; z = 3 cociente entero de $\frac{n}{m}$; x = 1 residuo de $\frac{n}{m}$; P = 86 352,88; G = 100; TEM=0,01 y al aplicar la fórmula 6.11, se tiene:

$$R = \left\{P - \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{m(1-z)}}{(1+i)^m-1} + (1+i)^{-zm} - z(1+i)^{-n}\right]\right\}\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$$

$$R = \left\{86\,352{,}88 - \frac{100}{0{,}01}\left[\frac{1-1{,}01^{3\times -2}}{1{,}01^3-1} + 1{,}01^{-3\times 3} - 3\times 1{,}01^{-10}\right]\right\}\left[\frac{0{,}01\times 1{,}01^{10}}{1{,}01^{10}-1}\right]$$

$$R = 9\,000$$

B16 | f_x =(B12-((B13/B14)*((1-(1+B14)^(B9*(1-B10)))/((1+B14)^B9-1)+((1+B14)^-(B10*B9))-(B10*(1+B14)^-B8))))*B15

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
8	n	10		Cuota	Importe		Nº	Cuota	C. Princ.	C. Int	Saldo
9	m	3		1	9000,00		0				86352,88
10	z	3		4	9100,00		1	9000,0	8136,47	863,53	78216,41
11	x	1		7	9200,00		2	9000,0	8217,84	782,16	69998,58
12	P	86352,88		10	9300,00		3	9000,0	8300,01	699,99	61698,56
13	G	100					4	9100,0	8483,01	616,99	53215,55
14	TEM	0,01					5	9100,0	8567,84	532,16	44647,70
15	FRC	0,105582					6	9100,0	8653,52	446,48	35994,18
16	R	9000,00					7	9200,0	8840,06	359,94	27154,12
17							8	9200,0	8928,46	271,54	18225,66
18	**Funciones utilizadas**						9	9200,0	9017,74	182,26	9207,92
19	ENTERO						10	9300,0	9207,92	92,08	0,00
20	RESIDUO							91200,0	86352,88	4847,12	

Figura 6.37 Modelo 6.20 que obtiene la cuota base de una anualidad cuyas rentas varían en un gradiente aritmético cada m número de rentas

Cuotas crecientes geométricamente cada m número de rentas

21. Un préstamo de 10 000 um que devenga una TEM de 0,015 debe cancelarse en el plazo de 10 meses con cuotas uniformes mensuales vencidas, que se incrementan con una razón de 1,12 después de cada 3 cuotas. Calcule el importe de las cuotas variables del préstamo y formule la tabla de servicio de la deuda, cuya fecha de inicio es el 15 de marzo.

Solución

Con los datos P=10 000; TEM=0,015; n=10; m=3; g=1,12; x=1 y z=3 y con la fórmula (6.12) se calculan los importes de las cuotas.

$$R = P\left[\frac{i(1+i)^n[(1+i)^m-g]}{(1+i)^x[(1+i)^m-1][(1+i)^{zm}-g^z]+g^z[(1+i)^x-1][(1+i)^m-g]}\right]$$

$$R = 10\ 000\left[\frac{0{,}015\times 1{,}015^{10}[1{,}015^3-1{,}12]}{1{,}015^1\times[1{,}015^3-1][1{,}015^{3\times 3}-1{,}12^3]+1{,}12^3[1{,}015^1-1][1{,}015^3-1{,}12]}\right]$$

$$R = 10\ 000\left[\frac{-0{,}0012937992}{0{,}0463635506\times -0{,}2615380246+0{,}02107392\times -0{,}074321625}\right]$$

$$R = 10\ 000\left[\frac{-0{,}0012937992}{-0{,}0136920794}\right]$$

$$R = 10\ 000\times 0{,}0944925281$$

$$R = 944{,}92528$$

Cuotas	1-3	4-6	7-9	10
Importe	944,93	1058,32	1185,31	1327,55

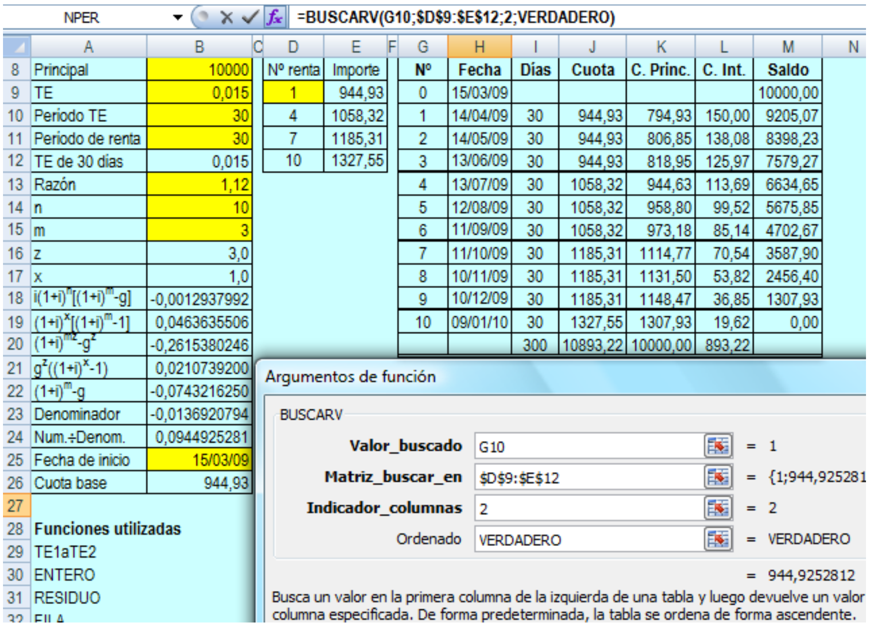


Figura 6.38 Modelo 6.21 cuotas crecientes geométricamente cada m número de cuotas; utiliza la función BUSCARV para construir la tabla de amortización.

22. Un préstamo de 20 000 um que devenga una TES de 0,061 debe cancelarse en el plazo de 10 trimestres con cuotas uniformes trimestrales vencidas, que disminuyen con una razón de 0,9 después de cada 3 cuotas trimestrales. Calcule el importe de las cuotas variables del préstamo y formule la tabla de amortización del préstamo, cuya fecha de inicio es el 15 de marzo.

Solución

Con los datos P=20 000; TET=0,03; n=10; m=3; g=0,9; x=1 y z=3 se calculan los importes de las cuotas.

$$R = P\left[\frac{i(1+i)^n[(1+i)^m-g]}{(1+i)^x[(1+i)^m-1][(1+i)^{zm}-g^z]+g^z[(1+i)^x-1][(1+i)^m-g]}\right]$$

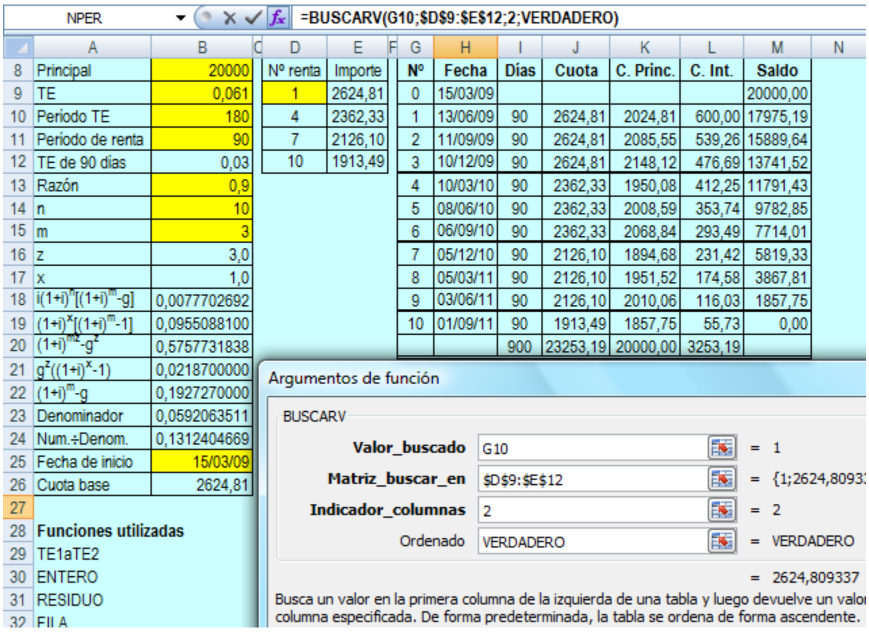
$$R = 20\ 000\left[\frac{0{,}03\times 1{,}03^{10}[1{,}03^3-0{,}9]}{1{,}03^1\times[1{,}03^3-1][1{,}03^{3\times 3}-0{,}9^3]+0{,}9^3[1{,}03^1-1][1{,}03^3-0{,}9]}\right]$$

$$R = 20\ 000\left[\frac{0{,}0077702692}{0{,}09550881\times 0{,}5757731838+0{,}02187\times 0{,}192727}\right]$$

$$R = 20\ 000\left[\frac{0{,}0077702692}{0{,}0592063511}\right]$$

$$R = 20\ 000\times 0{,}1312404669$$

$$R = 2\ 624{,}81$$



NPER =BUSCARV(G10;$D$9:$E$12;2;VERDADERO)

	A	B
8	Principal	20000
9	TE	0,061
10	Periodo TE	180
11	Periodo de renta	90
12	TE de 90 días	0,03
13	Razón	0,9
14	n	10
15	m	3
16	z	3,0
17	x	1,0
18	$i(1+i)^n[(1+i)^m-g]$	0,0077702692
19	$(1+i)^x[(1+i)^m-1]$	0,0955088100
20	$(1+i)^{mz}-g^z$	0,5757731838
21	$g^z((1+i)^x-1)$	0,0218700000
22	$(1+i)^m-g$	0,1927270000
23	Denominador	0,0592063511
24	Num.÷Denom.	0,1312404669
25	Fecha de inicio	15/03/09
26	Cuota base	2624,81
27		
28	**Funciones utilizadas**	
29	TE1aTE2	
30	ENTERO	
31	RESIDUO	
32	FILA	

Nº renta	Importe
1	2624,81
4	2362,33
7	2126,10
10	1913,49

Nº	Fecha	Días	Cuota	C. Princ.	C. Int.	Saldo
0	15/03/09					20000,00
1	13/06/09	90	2624,81	2024,81	600,00	17975,19
2	11/09/09	90	2624,81	2085,55	539,26	15889,64
3	10/12/09	90	2624,81	2148,12	476,69	13741,52
4	10/03/10	90	2362,33	1950,08	412,25	11791,43
5	08/06/10	90	2362,33	2008,59	353,74	9782,85
6	06/09/10	90	2362,33	2068,84	293,49	7714,01
7	05/12/10	90	2126,10	1894,68	231,42	5819,33
8	05/03/11	90	2126,10	1951,52	174,58	3867,81
9	03/06/11	90	2126,10	2010,06	116,03	1857,75
10	01/09/11	90	1913,49	1857,75	55,73	0,00
		900	23253,19	20000,00	3253,19	

Figura 6.39 Modelo 6.22 cuotas decrecientes geométricamente cada m número de cuotas; utiliza la función BUSCARV para construir la tabla de amortización.

6.11 Listado de fórmulas

Fórmula		Obtiene
$P_G = G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]\right\}$	(6.1a)	Valor presente de una anualidad de gradientes uniformes convencionales o aritméticos.
$P_G = G.FASG_{i;n}$	(6.1b)	Valor presente de una anualidad de gradientes uniformes convencionales o aritméticos con el FASG.
$R_G = G\left[\frac{1}{i} - \frac{n}{(1+i)^n-1}\right]$	(6.2a)	Rentas uniformes equivalentes de gradientes aritméticos G.
$R_G = G.FRCG_{i;n}$	(6.2b)	Rentas uniformes equivalentes de gradientes aritméticos G, que se obtienen con el FRCG.
$S_G = G\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i} - n\right]\right\}$	(6.3a)	Valor futuro de una anualidad de gradientes aritméticos G.
$S_G = G.FCSG_{i;n}$	(6.3b)	Valor futuro de una anualidad de gradientes aritméticos G, con el FCSG.
$P_g = R\left\{\frac{1}{(1+i)^n} \times \left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right]\right\}$	(6.4a)	Valor presente de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica, $g \neq (1+i)$.
$P_g = R.FASg_{i;n}$	(6.4b)	Valor presente de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando $g \neq (1+i)$.
$P_g = R\left[\frac{n}{g}\right]$	(6.5)	Valor presente de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica, $g = (1+i)$.
$R = P_g\left\{(1+i)^n\left[\frac{g-1-i}{g^n-(1+i)^n}\right]\right\}$	(6.6)	Cuota base de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica, $g \neq (1+i)$.
$R = P_g\left[\frac{g}{n}\right]$	(6.7)	Cuota base de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica, $g = (1+i)$.
$S_g = R\left[\frac{g^n-(1+i)^n}{g-1-i}\right]$	(6.8a)	Valor futuro de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica, $g \neq (1+i)$.
$S_g = R.FCSg_{i;n}$	(6.8b)	Valor futuro de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica, $g \neq (1+i)$.
$S_g = R\left[\frac{n(1+i)^n}{g}\right]$	(6.9)	Valor futuro de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica $g = (1+i)$.

$$P = \frac{R}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}\right] + \frac{G}{i}\left\{\frac{(1+i)^{-m(z-1)}-1}{1-(1+i)^m} - \frac{z-1}{(1+i)^{zm}} + z\left[\frac{(1+i)^x-1}{(1+i)^n}\right]\right\} \qquad (6.10)$$

Valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en un gradiente aritmético cada m número de rentas.

$$R = \left\{P - \frac{G}{i}\left[\frac{1-(1+i)^{m(1-z)}}{(1+i)^m-1} + (1+i)^{-zm} - z(1+i)^{-n}\right]\right\}\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right] \qquad (6.11)$$

Cuota base de una anualidad de una anualidad cuyas rentas varían en un gradiente aritmético cada m número de rentas.

$$R = P\left[\frac{i(1+i)^n[(1+i)^m-g]}{(1+i)^x[(1+i)^m-1][(1+i)^{zm}-g^z]+g^z[(1+i)^x-1][(1+i)^m-g]}\right] \qquad (6.12)$$

Renta uniforme del primer sub horizonte de una anualidad cuyas rentas crecen geométricamente cada m número de rentas.

$R = [P - G.FASG_{i;n}]FRC_{i;n}$ Cuota base en una anualidad con gradiente uniforme a partir de su valor presente

$G = \frac{P-R.FASG_{i;n}}{FASG_{i;n}}$ Gradiente uniforme de una anualidad con gradiente a partir de su valor presente

$G = \frac{S-R.FCS_{i;n}}{FCSG_{i;n}}$ Gradiente uniforme de una anualidad con gradiente a partir de su valor futuro

Preguntas de autoevaluación

1. ¿Qué es un gradiente? Ponga cinco ejemplos de operaciones financieras donde se presentan los distintos casos de gradientes.
2. Comente cómo se clasifican los gradientes.
3. ¿Qué es un gradiente convencional? Ponga tres ejemplos donde existen gradientes convencionales.
4. ¿Qué es un gradiente no convencional o gradiente desfasado? Enuncie un problema de anualidad que tiene gradientes desfasados.
5. ¿Qué es un gradiente aritmético?
6. ¿Qué es un gradiente geométrico?
7. Grafique otras anualidades cuyas rentas varían con gradientes aritméticos y geométricos, pero de forma distinta a los que consideró en las preguntas 5 y 6.
8. Demuestre la fórmula del valor presente de una anualidad de gradientes uniformes convencionales.
9. ¿Qué función cumple el FASG?
10. A partir de la fórmula (6.1a) despeje la variable n y compruebe su validez con un ejemplo.
11. Plantee una ecuación de equivalencia financiera que permita despejar el valor de la cuota base de una anualidad con gradiente uniforme convencional. Compruebe su validez con el planteamiento y desarrollo de un problema cuya solución exija la utilización de la fórmula obtenida.
12. Plantee una ecuación de equivalencia financiera que permita despejar el valor de G de una anualidad con gradiente uniforme convencional. Compruebe su validez con el planteamiento y desarrollo de un problema cuya solución exija la utilización de la fórmula obtenida.
13. ¿Qué es un gradiente uniforme negativo? Ponga un ejemplo donde existan gradientes uniformes negativos.
14. ¿Qué procedimiento sugiere para hallar el valor presente de gradientes uniformes desfasados?
15. Demuestre la fórmula que transforma una anualidad de gradientes uniformes en una anualidad simple vencida.
16. ¿Qué función cumple el FRCG?
17. Demuestre la fórmula del valor futuro de una anualidad de gradientes uniformes convencionales.
18. ¿Cómo se calcula el valor de i en una anualidad general?
19. ¿Qué función cumple el FCSG?
20. Demuestre la fórmula del valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica cuando $g \neq (1+i)$.
21. ¿Qué función cumple el FASg?
22. Demuestre la fórmula del valor presente de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica cuando $g=(1+i)$.
23. Obtenga la fórmula que obtiene la cuota base de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando $g=(1+i)$.
24. Demuestre la fórmula del valor futuro cuando $g \neq (1+i)$ y las rentas de la anualidad son crecientes o decrecientes.
25. ¿Qué función cumple el FCSg cuando $g \neq (1+i)$?
26. Obtenga la fórmula del valor futuro cuando $g=(1+i)$ y las rentas son crecientes geométricamente.
27. Obtenga la fórmula de la variable G, a partir de la fórmula del valor presente de la anualidad cuyas rentas varían en un gradiente aritmético cada m número de rentas.
28. Obtenga la fórmula de la variable G, a partir de la fórmula de la cuota base de una anualidad cuyas rentas varían en un gradiente aritmético cada m número de rentas.
29. Obtenga la fórmula de la variable g, a partir de la fórmula que calcula el importe de la renta uniforme del primer subhorizonte de una anualidad, cuyas rentas varían geométricamente cada m número de rentas.

Problemas propuestos

Gradiente aritmético uniforme y gradiente geométrico

1. Calcule el importe del gradiente aritmético uniforme de una anualidad cuya cuota base es 6 200 um, su renta final es 23 687 um y su horizonte temporal se compone de 30 rentas que tienen iguales períodos de renta.

2. Calcule la razón de variación y el valor de la renta número 20 de la anualidad que se presenta en la siguiente tabla, donde los períodos de renta son uniformes.

Importe de renta	220	198	178,2	160,38	…

3. Halle el número de términos de una anualidad cuyas rentas varían en progresión geométrica. Las dos primeras rentas son 140000 um; 144613,897854003 um y su último término es 200000 um. ¿Cuánto es el valor de la renta número 8?

Valor presente de una anualidad de gradientes uniformes convencionales FASG

4. Calcule el FASG que convierte una anualidad de gradiente uniforme convencional de 12 cuotas mensuales vencidas que devengan una TEM de 0,02, en un valor presente equivalente. Si la cuota base es 1 000 um y el gradiente uniforme convencional es 50 um, ¿cuánto es el valor presente de: las cuotas bases, de los gradientes uniformes convencionales y de la anualidad con gradientes uniformes?

5. Elabore una tabla de datos donde identifique los importes de las 24 rentas mensuales vencidas de una anualidad, cuya cuota base es 100 um, crece en cada periodo uniformemente hasta 514 um. Con una TEB (bimestral) de 0,0201 calcule:

   a. El valor presente de las cuotas bases.
   b. El valor presente de la anualidad de gradientes uniformes.
   c. El valor presente de la anualidad con gradiente uniforme.

6. Un préstamo de 5 000 um se contrató para amortizarse con 6 cuotas mensuales vencidas crecientes aritméticamente, cuya cuota base es 400 um con un gradiente uniforme convencional de 50 um hasta la quinta cuota, ¿cuánto es el importe de la sexta cuota con la cual quede totalmente cancelado el préstamo que devenga una TEM de 0,02?

7. Calcule el valor presente de un presupuesto de tesorería con flujos de caja trimestrales. El importe del primer flujo es 1 000 um el cual se incrementará trimestralmente en 500 um durante un año y medio. Utilice una TET de 0,05. Obtenga además el FAS que se aplica a las cuotas base y el FASG que se aplica a la anualidad con gradientes uniformes.

8. Calcule el costo presente total de una máquina cuyo costo de inversión fue 4 000 um y origina gastos de mantenimiento de 100 um el primer mes, el cual se incrementa en 20 um mensualmente hasta el final de la vida útil de la máquina que es 5 años. Aplique una TEM de 0,02. ¿Cuánto es el valor del FASG?

9. Con rentas mensuales vencidas y una TEM de 0,03, calcule el valor presente de las siguientes rentas.

Mes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rentas		100	120	140	160	180	200	260	240	260

10. Con una TET de 0,030301 y los datos de la siguiente tabla, calcule el importe de G y el valor futuro de los flujos de caja en el mes 6, de modo que el valor presente de los flujos de caja mensuales sean equivalentes a 67 642,75 um.

Mes	0	1	2	3	4	5	6
Flujo de caja	0	5 000	5 000 + G	5 000 + 2G	5 000 + 3G	5 000 + 4G	5 000 + 5G

11. La compañía Pisa invirtió 11 034,10 um en un programa de productividad que permitirá efectuar ahorros de 400 um a fin del primer mes, los que se incrementarán en 100 um mensualmente. ¿En cuánto tiempo Pisa recuperará su inversión si su costo de oportunidad es una TEM de 0,02?

12. La compañía Yape obtuvo un préstamo de 45 449,64 um en el Banco Surnor, el cual devenga una TEM de 0,01 y se cancela en el plazo de un año con pagos que se efectúan cada fin de mes, con el compromiso de que la cuota base se incremente en 100 um mensualmente. ¿Cuánto es el importe de la última cuota?

13. Calcule el importe del gradiente uniforme convencional en una anualidad de 10 rentas trimestrales creciente aritméticamente, cuya cuota base es 500 um y su valor presente es 4 991,28 um; utilice una TET de 0,03.

14. Calcule el gradiente uniforme por aplicar a un préstamo de 9 643,31 um rembolsable en el plazo de un año con cuotas uniformes vencidas trimestrales, cuya primera renta es 2 000 um y la TNA es 0,2 capitalizable trimestralmente.

Gradientes uniformes convencionales negativos

15. Los importes de las rentas mensuales de una anualidad vencida se presentan a continuación. Con una TEM de 0,03 calcule el valor presente:

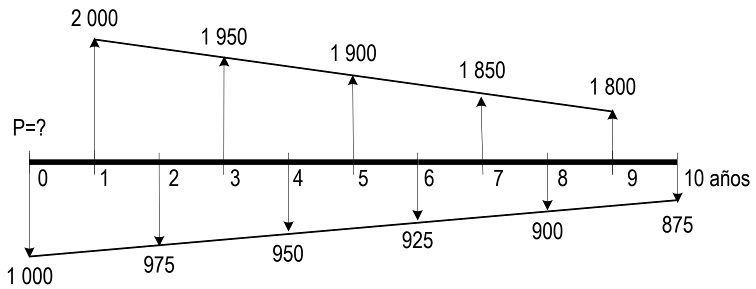
a. De la cuota base mensual vencida.
b. De los gradientes uniformes mensuales vencidos.
c. De la anualidad con gradientes uniformes.

Mes	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Flujo de caja	0	600	550	500	450	400	350	300	250

16. Calcule el valor presente de una anualidad cuyo horizonte temporal es 5 años en el cual se realizan rentas vencidas trimestrales que varían en progresión aritmética, cuya cuota base es 1 000 um la cual disminuye en 50 um durante cada trimestre del horizonte temporal. Utilice una TET de 0,05.

17. Con una tasa de costo de oportunidad del capital, que es una TEA de 0,22, calcule el valor presente de los costos de un proyecto de inversión cuya vida útil es tres años. El proyecto puede ahorrar costos mensuales de 5 000 um el primer mes, luego esta cantidad disminuirá en 50 um cada mes, hasta el final de su vida útil.

18. Con una TEA de 0,1 calcule el valor presente de un proyecto, cuyos flujos de caja (ingresos y egresos) se presentan en el siguiente diagrama de tiempo-valor.



Valor presente de una anualidad de gradientes uniformes desfasados

19. Un proyecto de inversión que tiene una vida útil de 5 años, puede generar flujos de caja trimestrales vencidos de 5 000 um durante el primer año de vida. Después de este período los flujos de caja se incrementarán en 100 um trimestralmente hasta el final del horizonte temporal. Con una tasa de costo de oportunidad que es una TES de 0,1025 calcule el valor actual de los ingresos del proyecto.

20. Una empresa realiza un programa de inversión en activos con el objeto de optimizar sus costos de operación mensuales durante un período de 4 años. Se estima que en el primer semestre los ahorros en costos de operación sean 1 000 um mensuales, luego de lo cual este importe aumente en 100 um cada mes hasta el final del cuarto año fecha en la que termina el programa. Con una TET de 0,030301 calcule el valor presente de los ahorros.

21. Los ingresos estimados de un proyecto son 8 000 um mensuales durante el primer año de operación. Durante los cuatro años restantes de vida útil, esos ingresos mensuales disminuirán en 100 um en cada mes. Con una TEB de 0,0404 calcule el valor actual de los ingresos de ese proyecto.

22. Con una TEM de 0,02 y períodos mensuales, calcule el valor presente de la anualidad cuyos importes de rentas se presentan en la siguiente tabla.

Mes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rentas			60	60	80	100	120	140	160	180	200

23. Calcule el importe de un préstamo que devenga una TET de 0,030301 y se amortiza en el plazo de dos años, con cuotas mensuales vencidas. En ese período el primer pago de 1 100 um se realiza a fines del décimo tercer mes, luego de lo cual las cuotas restantes se incrementan en 100 um cada mes hasta el final del plazo establecido.

Renta uniforme de anualidad de gradientes uniformes FRCG

24. Calcule el FRCG que convierte una anualidad de gradiente convencional de 24 meses en una anualidad equivalente con rentas mensuales uniformes; utilice una TEM de 0,03. Compruebe su respuesta con una cuota base de 100 um, y un gradiente uniforme de 10 um; con este dato determine el valor presente de la anualidad.

25. La compañía Traspol SA ha proyectado los siguientes flujos de caja mensuales:

Mes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Flujo de caja	0	100	120	140	160	180	200	220	240	260

Con una TEB (bimestral) de 0,0201 calcule:

a. La renta uniforme equivalente de los gradientes uniformes.
b. La renta uniforme equivalente de la anualidad con gradiente uniforme.
c. ¿Cuánto es el valor presente de los flujos de caja?

26. Calcule el costo mensual equivalente de una inversión en un proceso productivo que requiere un desembolso inicial de 2 000 um e irroga costos mensuales vencidos de 50 um que se incrementan en 20 um por mes, hasta el mes 10. Utilice una TEM de 0,02 en esta evaluación de 10 meses.

27. Dos proyectos mutuamente excluyentes requieren las inversiones (en el momento 0) y demandan los costos de operación, que se muestra en la siguiente tabla (todos los costos están en miles de um). Con una tasa de costo de oportunidad que es una TEA de 0,18 determine cuál es el proyecto que tiene el menor costo equivalente anual que incluye costos de inversión y de operación.

Años	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Proyecto A	80	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5
Proyecto B	60	30	29	28	27	26					

28. Con los datos: Cuota base=10 000, G=500, n=6 trimestres, TET=0,05; convierta esa anualidad con gradiente uniforme convencional, en una anualidad simple equivalente con rentas uniformes simples vencidas. Calcule el valor del FRCG que convierte la anualidad de los gradientes en una renta uniforme equivalente.

Valor futuro de una anualidad de gradientes uniformes convencionales FCSG

29. La compañía Pípon S.A. decidió adquirir dentro de 10 meses contados a partir de la fecha, una nueva máquina para su departamento de producción. El costo de inversión se estima para esa fecha en 10 123,58 um. Pípon S.A. puede destinar para esa adquisición, un importe de 500 um al final del primer mes y de allí en adelante incrementarlo mensualmente en forma de gradiente aritmético uniforme. Si dichos importes los deposita en un banco y devengan una TEM de 0,03, ¿cuánto es el importe del gradiente uniforme que permita acumular el monto de 10 123,58 um en el plazo de 10 meses?

30. ¿Cuál será el monto que se acumulará en un año al efectuar depósitos cada fin de mes en un banco que remunera los ahorros con una TEB de 0,0609? El primer depósito será 200 um el cual se incrementará mensualmente en 50 um.

31. Un ahorrista durante el plazo de un año efectúa depósitos mensuales vencidos. Si el importe del primer depósito es 500 um y a partir de esa fecha incrementa cada depósito en 100 um. ¿Cuánto acumulará al finalizar el mes 12 si esos depósitos devengan una TEM de 0,02?

32. Una empresa tiene como objetivo acumular un fondo que le permita adquirir dentro de un año (contado a partir de la fecha) una máquina automatizada, para lo cual decide depositar en un banco a fin del primer mes un importe de 900 um, el cual incrementará en 300 um mensualmente. Si por los depósitos percibe una TNA de 0,12 capitalizable mensualmente, ¿cuánto tendrá al finalizar el plazo comprometido?

33. Calcule el monto al final del mes 12, si se efectuaron 11 depósitos consecutivos mensuales vencidos que devengan una TEM de 0,03, de los cuales los 4 primeros fueron de 200 um y a partir del quinto al undécimo se incrementaron en 50 um cada mes. El primer depósito se efectuó a fines del primer mes.

34. En un período de dos años se realizan 24 depósitos mensuales vencidos; el primer depósito fue 2 500 um y los siguientes disminuyeron en 30 um cada mes. Con una TEM de 0,01 calcule el monto de esa operación.

Valor futuro de gradientes uniformes desfasados

35. Calcule el monto que se acumulará en una cuenta de ahorros durante año y medio con depósitos mensuales vencidos, los cuales devengan una TEM de 0,01. En ese período de tiempo durante el primer año los depósitos serán 800 um, luego se incrementarán en 40 um en cada mes hasta el final del horizonte temporal.
    a. ¿Cuánto es el importe del valor futuro de las cuotas bases?
    b. ¿Cuánto es el valor futuro de los importes de los gradientes uniformes desfasados?
    c. Plantee una ecuación de modo que los importes de los depósitos mensuales se descuenten hacían el momento 0 y luego se capitalicen al final del mes 18, ¿cuánto es el importe de ese valor futuro?

36. Calcule el monto que se acumulará en una cuenta de ahorros durante un año con depósitos mensuales vencidos, los cuales devengan una TEM de 0,01. En ese período de tiempo durante el primer trimestre los depósitos serán 900 um, luego se incrementarán en 60 um en cada mes hasta el final del horizonte temporal.
    a. ¿Cuánto es el importe del valor futuro de las cuotas bases?
    b. ¿Cuánto es el valor futuro de los importes de los gradientes desfasados?
    c. Plantee una ecuación de modo que los importes de los depósitos mensuales se descuenten hacia el momento 0 y luego se capitalicen al final del mes 12, ¿cuánto es el importe de ese valor futuro?

Valor presente de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando g≠(1+i) FASg

37. ¿Cuánto es el precio actual de una acción para un inversionista que requiere una TEA de 0,15 como tasa de rendimiento, si espera que el dividendo por acción del próximo año sea 1,2 um y estima que crezca anualmente con una tasa de 0,05? El inversionista planea tener la acción durante 5 años y luego venderla en un precio de 15 um. ¿Cuánto es el valor del FASg?

38. En la fecha una empresa pagó un dividendo de 1,8 um por acción; espera que este dividendo crezca anualmente a una TEA de 0,1. ¿Cuánto es el precio que pagaría por esta acción hoy con una TEA de costo de oportunidad de 0,18, si espera tenerla durante 8 años y luego venderla en un precio de 25 um? ¿Cuánto es el valor del FASg?

39. Calcule el importe de un préstamo que devenga una TET de 0,03 otorgado para amortizarse en el plazo de 6 años, con cuotas trimestrales vencidas cuya cuota base de 500 um, se incrementará 5% con relación a la anterior. ¿Cuánto es el valor del FASg?

40. ¿Cuánto es el importe de un préstamo que devenga una TEM de 0,01 en el plazo de 2 años? Este préstamo se amortiza con cuotas bimestrales vencidas cuya cuota base de 300 um se incrementa 1% con relación a la anterior. ¿Cuánto es el valor del FASg?

Valor presente de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando g=(1+i) FASg

41. Con una TEA de 0,12 calcule el valor presente de los flujos de caja anuales de un proyecto que tiene una vida útil estimada de 8 años. En ese período de tiempo el primer flujo de caja proyectado es 8 000 um y los siguientes se incrementarán 12% con relación al anterior. ¿Cuánto es el valor del FASg?

42. Los flujos de caja anuales de un proyecto durante su vida útil de 10 años se incrementarán en una razón de 1,15 anual. Si el primer flujo de caja anual se estima en 5 000 um, calcule el valor presente de esos flujos de caja con una TES (semestral) de 0,072380529. ¿Cuánto es el valor del FASg?

43. ¿Cuánto es el importe de un préstamo cuya cuota base vencida mensual de 1 000 um se incrementa en una TEM de 0,02 cada mes? La anualidad es de 10 meses y la TET es 0,061208. ¿Cuánto es el valor del FASg?

Cálculo de la cuota base de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando g≠(1+i)

44. Calcule la primera cuota de una anualidad creciente geométricamente, cuyo valor presente es 5 000 um, su número de cuotas trimestrales es 20, su razón de crecimiento geométrico es 1,04 y la tasa de evaluación es una TET de 0,05. ¿Cuánto es el valor del FRCg de esta anualidad?

45. Un proyecto que requiere una inversión de 80 000 um tiene una vida útil de diez años; período en el cual los flujos de caja netos semestrales pueden crecer con una razón de 1,03 en cada período. ¿Cuánto debe ser el importe del primer flujo de caja semestral si se requiere una tasa de rentabilidad que es una TEA de 0,1449? ¿Cuánto es el valor del FRCg de esta anualidad?

Cálculo de la cuota base de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando g=(1+i)

46. ¿Cuánto debe ser el importe de la cuota base que amortizará un préstamo de 90 000 um el cual devenga una TEB (bimestral) de 0,0201? Este préstamo debe cancelarse en el plazo de un año con cuotas mensuales vencidas, cada una de las cuales se incrementan en una razón de 1,01 cada mes. ¿Cuánto es el valor del FRCg de esta anualidad? Formule el cuadro de las 12 cuotas del préstamo que crece en progresión geométrica.

47. Un préstamo de 80 000 um devenga una TET de 0,03; este préstamo tiene que amortizarse con cuotas trimestrales vencidas que se incrementarán trimestralmente con una razón de 1,03 durante el período de dos años. ¿Cuánto es el importe de la primera cuota o cuota base? ¿Cuánto es el valor del FRCg de esta anualidad?

Valor futuro de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando g≠(1+i) FCSg

48. Una persona decide acumular un fondo que devenga una TET de 0,04 con cuotas vencidas bimestrales, en el plazo de dos años. La primera cuota o cuota base es 500 um y las siguientes se incrementan 2% en cada bimestre. con relación a la anterior ¿Cuánto es el monto que se acumulará en dicho plazo?

49. Calcule el monto que se acumulará en un plazo de dos años si se colocan rentas trimestrales vencidas en un banco; estos depósitos devengan una TEM de 0,01. La primera cuota será de un importe de 500 um y crecerán trimestralmente con una razón de 1,03 en cada renta.

Valor futuro de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica cuando g=(1+i)

50. Se estima que los flujos de caja netos trimestrales de un proyecto durante su vida útil de 5 años puedan incrementarse en una razón de 1,04 cada trimestre. Calcule el monto que se acumulará en ese período, si se utiliza como tasa de evaluación una TET de 0,04 y el importe del primer flujo de caja se ha proyectado en 5 000 um. Calcule el FCSg del presente problema y formule el cuadro de acumulación del monto.

51. Calcule el importe del fondo que se acumulará en el plazo de un año y medio con depósitos mensuales vencidos que devengan una TEB de 0,0404. El primer depósito o cuota base es 400 um y los siguientes depósitos se incrementan en 2% en cada mes. Calcule el FCSg del presente problema y formule el cuadro de acumulación del monto.

Valor presente de la anualidad cuyas rentas varían en un gradiente aritmético cada m número de rentas

52. Una empresa evalúa un proyecto de inversión que tiene una vida útil de 5 años. De acuerdo con las proyecciones semestrales de su presupuesto de capital, estima que el importe de su primer flujo de caja neto semestral será 8 000 um; considera que este flujo se incrementará en 1 000 um durante cada uno de los cuatro años restantes. ¿Cuánto es valor presente de estos flujos con una tasa de costo de oportunidad que es una TEA de 0,1236?

53. Para amortizar un préstamo que devenga una TET de 0,02 y se amortizará con cuotas trimestrales, una empresa puede destinar un importe de 5 000 um en el primer trimestre, los cuales se incrementarán en 1 500 um después de cada tres trimestres. Calcule el importe del préstamo que se cancelará en el plazo de 4 años.

Cuota base de una anualidad cuyas rentas varían en un gradiente aritmético cada m número de rentas

54. Un préstamo de 50 000 um se cancelará en el plazo de dos años con cuotas vencidas trimestrales, que se incrementarán en 1 500 um después de cada 2 pagos. Calcule el importe de la primera cuota, si el préstamo devenga una TES (semestral) de 0,0609. Si el incremento fuese 2 500 um, ¿cuánto será el nuevo importe de la primera cuota?

55. Una empresa necesita un préstamo de 80 000 um para un proyecto con una demanda eminentemente estacional, cuyo mercado irá decreciendo en cada período bimestral. Estima que durante la vida útil de dos años los pagos bimestrales por devolución del préstamo deberán disminuir en un importe de 1 000 um

después de cada dos períodos de pago. Si el préstamo devenga una TEM de 0,01 ¿cuánto es el importe de la primera cuota, y cuánto es el interés del préstamo?

Cuota base de una anualidad cuyas rentas varían geométricamente cada m número de rentas

56. Un préstamo de 50 000 um debe cancelarse en el plazo de un año con cuotas uniformes mensuales vencidas que se incrementarán 10% después de cada dos períodos de renta. Calcule los importes de las rentas para cada subhorizonte en las cuales son uniformes, si el préstamo devenga una TEM de 0,01. ¿Cuánto es el interés del préstamo?

57. Un préstamo de 70 000 um debe cancelarse en el plazo de tres años con cuotas uniformes trimestrales vencidas que disminuirán 5% después de cada cinco períodos de renta. Calcule los importes de las rentas para cada subhorizonte en las cuales son uniformes, si el préstamo devenga una TEM de 0,01. ¿Cuánto es el interés del préstamo?

Resumen del capítulo

En una anualidad vencida cuyos períodos de renta son uniformes, el período de tasa coincide con el período de renta y cuyas rentas consecutivas varían de acuerdo con una ley predeterminada, se denomina *gradiente* a la variación entre el importe de cualquier renta a partir de la segunda y la anterior.

Los gradientes uniformes (aritméticos) pueden ser positivos, negativos, convencionales y no convencionales o desfasados. Los gradientes geométricos varían de acuerdo con una razón geométrica mayor o menor que uno. Si la razón es mayor que uno las rentas son crecientes; si la razón es menor que uno se generan rentas decrecientes. Pueden darse otros tipos de gradientes que varían de acuerdo con una ley o relación específica.

Las anualidades cuyas rentas experimentan variaciones aritméticas, pueden descomponerse en una anualidad de las cuotas bases y una anualidad de los gradientes uniformes, siendo la cuota base un importe igual a la primera renta. De la anualidad de los gradientes uniformes se puede obtener su valor presente y convertirse en una anualidad de rentas uniformes a través de una FASG o FRCG. Hechas estas conversiones de stock y flujo de efectivo los problemas de gradientes se tratan como anualidades simples a las que le son aplicables los factores financieros.

Una anualidad con gradiente es convencional cuando los períodos de rentas son uniformes y el primer gradiente no nulo aparece en la segunda renta; en caso contrario es una anualidad no convencional.

Una anualidad con gradientes uniformes desfasados es aquélla cuyos períodos de rentas son uniformes pero el primer gradiente no nulo aparece luego de la segunda renta. Ubicado el momento de inicio de un gradiente desfasado al que se le puede reenumerar como momento 2, su tratamiento es similar al de una anualidad con gradiente uniforme convencional, pero para hallar su valor presente es necesario llevarlo al momento 0 original.

En una anualidad de gradientes uniformes negativos, la primera renta es el flujo mayor de la serie, la cual decrece en un importe igual al valor absoluto del gradiente uniforme.

Las anualidades cuyas rentas crecen geométricamente pueden ser traídas directamente hacia el presente a través de las fórmulas desarrolladas en este capítulo.

Capítulo 7

ANUALIDADES SIMPLES CON INTERÉS SIMPLE

El objetivo general de este capítulo es estudiar anualidades simples que devengan interés simple, para evitar el anatocismo o acto por el cual se cobra intereses sobre los intereses vencidos; que implica una sola capitalización en la operación financiera, la misma que se realiza al final de su horizonte temporal.

Una anualidad es simple cuando todas las rentas son del mismo importe, los períodos de renta son iguales, el período de la tasa de interés es igual que el período de renta y la tasa de interés no varía durante el horizonte temporal.

Si en las operaciones a interés simple, que es una operación monocapitalizada, debe producirse sólo una capitalización de interés durante el horizonte temporal de la operación:

- ¿cómo puede acumularse un determinado monto final S, luego de realizar n depósitos uniformes, en fondo bajo un régimen de interés simple con tasa nominal constante?
- ¿cómo puede amortizarse un préstamo con cuotas uniformes, si el préstamo devenga una tasa de interés simple o tasa de interés nominal?

En las operaciones de acumulación o de amortización de capitales que devengan una tasa de interés simple, se aplica el método Primero Principal Luego Interés (PPLI). De acuerdo con este método el interés simple no puede retirarse antes del principal, sólo puede retirarse al término del horizonte temporal.

En el presente capítulo se desarrollan las anualidades: vencidas, anticipadas y truncas bajo el régimen de interés simple; en las cuales:

- las rentas son uniformes,
- los períodos de renta y de tasa de interés simple son iguales y uniformes, y,
- la tasa de interés simple es constante.

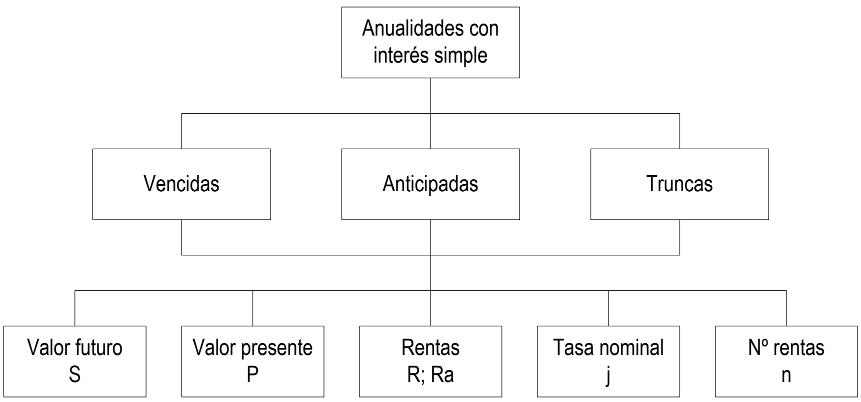


Figura 7.1 Anualidades que devengan interés simple y sus variables que intervienen.

Objetivos del capítulo

Al terminar este capítulo el lector estará capacitado para realizar operaciones con anualidades simples vencidas, anticipadas y truncas que devengan interés simple.

ANUALIDADES VENCIDAS

6.1 Hallar el valor futuro o monto de una anualidad vencida.

6.2 Hallar el importe de la renta uniforme vencida en función de su valor futuro.

6.3 Calcular el valor de j de una anualidad vencida en función de S.

6.4 Calcular el valor de n en una anualidad vencida en función de S.

6.5 Hallar el valor de P de una anualidad con rentas uniformes vencidas.

6.6 Hallar el valor de la renta uniforme en función de P.

6.7 Calcular el valor de j en una anualidad vencida en función de P.

6.8 Calcular el valor de n en una anualidad vencida en función de P.

ANUALIDADES ANTICIPADAS

6.9 Hallar el valor futuro o monto de una anualidad anticipada.

6.10 Hallar el importe de la renta uniforme anticipada en función de su valor futuro.

6.11 Calcular el valor de j de una anualidad anticipada en función de S.

6.12 Calcular el valor de n en una anualidad anticipada en función de S.

6.13 Hallar el valor de P en una anualidad anticipada.

6.14 Hallar el valor de la renta uniforme anticipada en función de P.

6.15 Calcular el valor de j en una anualidad anticipada en función de P.

6.16 Calcular el valor de n en una anualidad anticipada en función de P.

ANUALIDADES TRUNCAS

6.17 Hallar el valor futuro o monto de una anualidad anticipada trunca.

6.18 Hallar el importe de la renta uniforme anticipada en función de S.

6.19 Calcular el valor de j de una anualidad anticipada en función de S.

6.20 Calcular el valor de n en una anualidad anticipada en función de S.

6.21 Hallar el valor de P en una anualidad anticipada trunca.

6.22 Hallar el valor de la renta uniforme anticipada en función de P.

6.23 Calcular el valor de j en una anualidad anticipada en función de P.

6.24 Calcular el valor de n en una anualidad anticipada en función de P.

6.25 Plantear modelos en Excel y resolver problemas de anualidades simples que devengan interés simple.

A. Anualidades vencidas

7.1 Valor futuro o monto final de una anualidad vencida

En una anualidad simple bajo el régimen de interés simple, el interés se capitaliza únicamente en el momento final de su horizonte temporal. Como la anualidad es simple vencida y de rentas uniformes con importes iguales a R, su valor futuro, monto final o capital final S, se obtiene de la manera que se ilustra en el siguiente diagrama.

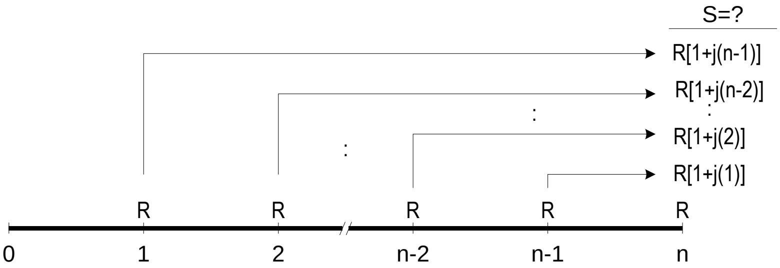


Figura 7.2 Diagrama de tiempo-valor que acumula un monto final del horizonte temporal, en una cuenta a interés simple con depósitos vencidos.

El valor futuro o monto final de la anualidad simple vencida es igual a:

$$\begin{aligned} S = \; & R \\ & +R[1+j(1)] \\ & +R[1+j(2)] \\ & \vdots \\ & +R[1+j(n-3)] \\ & +R[1+j(n-2)] \\ & +R[1+j(n-1)] \end{aligned}$$

El segundo miembro de la ecuación anterior es la suma de una progresión aritmética de n términos, donde:

$S = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ Suma de una progresión aritmética

$a_1 = R$ Primer término de la progresión

$a_n = R[1+j(n-1)]$ Último término de la progresión

En consecuencia:

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S = \frac{n\{R + R[1 + j(n-1)]]}{2}$$

$$S = \frac{n\{R[1 + 1 + j(n-1)]]}{2}$$

$$S = \frac{nR[2 + j(n-1)]}{2}$$

Al reagrupar los factores anteriores se tiene:

$$\boxed{S = R\left\{\frac{n[2 + j(n-1)]}{2}\right\}} \quad (7.1a)$$

La fórmula (7.1a) calcula el valor futuro o monto final de una anualidad simple vencida bajo el régimen de interés simple, en el cual R, j y n son del mismo plazo.

El factor de capitalización de la serie uniforme vencida a interés simple fcs
En la fórmula (7.1a) el término entre llaves se denomina *factor de capitalización de la serie vencida a interés simple para una tasa* j *y* n *períodos*. Dicho factor se simboliza $fcs_{j;n}$. Por lo tanto (7.1a) se representa:

$$\boxed{S = R \times fcs_{j;n}} \quad (7.1b)$$

Ejemplo 7.1
El día 20 de octubre una empresa firmó un contrato para depositar cada 90 días durante el plazo de un año un importe de 1 000 um en un banco, estos depósitos devengan una TNA de 0,18.

a. Calcule el monto que se acumulará al término del plazo pactado.

b. Formule del cuadro de acumulación del monto. El primer depósito se realizará el 18 de enero del próximo año, año que no es bisiesto.

Solución
Con los datos: TNT=0,045; n=4; R=1 000 y con la fórmula (7.2a) se tiene:

a. Monto que se acumulará al término del plazo pactado.

$$S = R\left\{\frac{n[2+j(n-1)]}{2}\right\} \qquad S = 1\ 000\left\{\frac{4[2+0{,}045(4-1)]}{2}\right\}$$

$$S = 1\ 000 \times 4{,}27 = 4\ 270$$

b. Cuadro de acumulación del fondo a interés simple con depósitos vencidos.

En el siguiente cuadro de acumulación del fondo, se observa que el primer depósito R se realiza el 18/01 y su saldo (en la columna kR) devengó un interés simple de 45 um el día 18/04, es decir 90 días después. De este modo el día 360 se habrá acumulado 4 000 um de capital y un monto de 4 270 um.

M	Nº	Fecha	Días	R	NºR	Interés	Monto
0		20/10	0				0
1	1	18/01	90	1 000	1 000	0	1 000
2	2	18/04	180	1 000	2 000	45	2 045
3	3	17/07	270	1 000	3 000	90	3 135
4	4	15/10	360	1 000	4 000	135	4 270
				4 000		270	

El monto en cualquier momento es igual al monto anterior, más el depósito efectuado al fondo (columna R), más el interés simple acumulado (Interés); así el monto de 4 270 um al final del horizonte es igual a 3 135+1 000+135.

Las siglas que se presentan en los cuadros de servicio de la deuda o de amortización y de acumulación o monto, tienen el siguiente significado:

M	Momento de la anualidad.
N°	Ordinal de la cuota o renta.
Fecha	Es la fecha de vencimiento de la cuota uniforme
R	Importe de la cuota uniforme vencida.
Ra	Importe de la cuota uniforme vencida.
C. Princ.	Cuota principal, parte de la cuota que rebaja el principal. Es la diferencia de R y C. Int.

C. Int.	Cuota interés, importe de la cuota que debe pagarse. Si Cuota N° <> n, entonces C. Int. es 0, de lo contrario es la $\sum$ de Int. Dev.
Principal	Importe del préstamo luego de pagarse la cuota principal. Es igual al principal anterior menos la cuota principal.
Int. Acum	Interés acumulado al vencimiento de cada cuota. Es igual al interés acumulado anterior, más el interés devengado menos la cuota principal pagada.
S_k	Saldo del préstamo al vencimiento de la k-ésima cuota. Es la suma del principal más el interés acumulado.
Int. Dev.	Interés devengado. Es el producto del principal anterior por la tasa de interés.

7.2 R uniforme de una anualidad en función de S

A partir de la fórmula (7.1a) se tiene:

$$S = R\left\{\frac{n[2+j(n-1)]}{2}\right\} \quad \text{Fórmula (7.1a)}$$

$$R = S\left\{\frac{2}{n[2+j(n-1)]}\right\} \quad \text{Al despejar R}$$

$$\boxed{R = S\left\{\frac{2}{n[2+j(n-1)]}\right\}} \quad \textit{(7.2a)}$$

La fórmula (7.2a) calcula el importe de la renta uniforme vencida en función del valor futuro o monto final de una anualidad simple vencida bajo el régimen de interés simple, en el cual R, j y n son del mismo plazo.

El factor de depósito al fondo de amortización a interés simple fdfa
En la fórmula (7.2a) el término entre llaves se denomina *factor de depósito al fondo de amortización a interés simple para una tasa* j *y* n *períodos*. Dicho factor se simboliza $fdfa_{j;n}$. Por lo tanto (7.2a) se representa:

$$\boxed{R = S \times fdfa_{j;n}} \quad (7.2b)$$

Ejemplo 7.2
En el plazo de un año se requiere acumular un monto de 20 600 um con depósitos uniformes trimestrales vencidos, los mismos que serán colocados en una cuenta a interés simple cuya TNA es 0,08. ¿Cuál es el importe de cada depósito?

Solución
Con los datos: S=20 600; n=4; j =TNT=0,02; y con la fórmula (7.2) se calcula R.

$$R = S\left\{\frac{2}{n[2+j(n-1)]}\right\} \qquad R = 20\,600\left\{\frac{2}{4[2+0{,}02\times(4-1)]}\right\}$$

$$R = 20\,600 \times 0{,}242718446 = 5\,000$$

El cálculo anterior se comprueba con la siguiente tabla de acumulación del monto simple con la renta de 5 000 um.

M	Nº	R	NºR	Interés	Monto
1	1	5000	5000		5000
2	2	5000	10000	100	10100
3	3	5000	15000	200	15300
4	4	5000	20000	300	20600
		20000		600	

7.3 j de una anualidad vencida en función de S

A partir de la fórmula (7.1a) se tiene:

$$S = R\left\{\frac{n[2+j(n-1)]}{2}\right\} \quad \text{Fórmula (7.1a)}$$

$$\frac{n[2+j(n-1)]}{2} = \frac{S}{R}$$

$$n[2+j(n-1)] = \frac{2S}{R}$$

$$2n + jn(n-1) = \frac{2S}{R}$$

$$jn(n-1) = \frac{2S}{R} - 2n$$

$$jn(n-1) = \frac{2S - 2Rn}{R}$$

$$jn(n-1) = \frac{2(S - Rn)}{R}$$

$$\boxed{j = \frac{2(S-Rn)}{Rn(n-1)}} \quad (7.3)$$

Ejemplo 7.3

En el plazo de un año se acumuló un monto simple de 41 800 um al depositar 10 000 um cada fin de trimestre. Calcule la TNT a la que fueron colocados dichos depósitos, en esta operación a interés simple.

Solución

Con los datos S=41 800; n=4; R=10 000; y con la fórmula (7.3) se calcula j.

$$j = \frac{2(S-Rn)}{Rn(n-1)} \qquad TNT = \frac{2(41\,800 - 10\,000 \times 4)}{10\,000 \times 4(4-1)} = \frac{3\,600}{120\,000} = 0{,}03$$

El cálculo anterior se comprueba con la siguiente tabla de acumulación del monto con la tasa de interés simple trimestral de 0,03.

M	Nº	R	NºR	Interés	Monto
1	1	10000	10000		10000
2	2	10000	20000	300	20300
3	3	10000	30000	600	30900
4	4	10000	40000	900	41800
		40000		1800	

7.4 n en una anualidad vencida en función de S

Dados el valor futuro, el importe de la renta uniforme vencida y la tasa de interés simple constante de una anualidad simple vencida, puede derivarse la fórmula para el cálculo del número de períodos de tasa de interés, que a su vez es el número de rentas uniformes vencidas, al despejarla de la fórmula (7.1a).

$$S = R\left\{\frac{n[2+j(n-1)]}{2}\right\} \qquad \text{Fórmula (7.1a)}$$

$$\frac{n[2+j(n-1)]}{2} = \frac{S}{R}$$

$$n[2+j(n-1)] = \frac{2S}{R}$$

$$n(2+jn-j) = \frac{2S}{R}$$

$$2n+jn^2-jn = \frac{2S}{R}$$

$$2n+jn^2-jn-\frac{2S}{R} = 0$$

$$jn^2+(2-j)n-\frac{2S}{R} = 0$$

$$Rjn^2+R(2-j)n-2S = 0$$

$$n_{1;2} = \frac{-R(2-j) \pm \sqrt{[R(2-j)]^2-4(Rj)(-2}}{2Rj}$$

$$\boxed{n_{1;2} = \frac{R(j-2) \pm \sqrt{[R(j-2)]^2+8RjS}}{2Rj}} \qquad (7.4)$$

$$n = \begin{cases} n = n_1 & si\ n_1\ es\ entero\ positivo; \\ n = n_2 & si\ n_2\ es\ entero\ positivo. \end{cases}$$

En el caso de que a partir de valores hipotéticos de S, R y j, n no resultara un valor entero positivo, entonces no existiría ninguna anualidad vencida simple cuyos valores de S, R y j sean iguales a los respectivos valores hipotéticos.

Ejemplo 7.4

¿Cuántas cuotas de 20 000 um cada una, serán necesarias depositar cada 90 días en un banco, para acumular un monto de 82 400 um? Esos depósitos devengan interés simple con una TNA de 0,08.

Solución

Con los datos: R=20 000; j =TNT=0,02; S=82 400 y con la fórmula (7.4) se calcula n:

$$n = \frac{R(j-2) \pm \sqrt{[R(j-2)]^2+8RjS}}{2Rj}$$

Sea $B = R(j-2) \ \rightarrow \ B = 20\,000(0{,}02-2) = -39\,600$

$$n = \frac{-39\,600 \pm \sqrt{-39\,600^2+8 \times 20\,000 \times 0{,}02 \times 82\,400}}{2 \times 20\,000 \times 0{,}02}$$

$$n = \frac{-39\,600 \pm \sqrt{1568160000+263680000}}{800} = \frac{-39\,600+42\,800}{800} = 4$$

El cálculo anterior se comprueba con la siguiente tabla de acumulación del monto con las 4 cuotas uniformes vencidas de 20 000 um.

M	Nº	R	NºR	Interés	Monto
1	1	20000	20000		20000
2	2	20000	40000	400	40400
3	3	20000	60000	800	61200
4	4	20000	80000	1200	82400
		80000		2400	

7.5 Valor de P de una anualidad con rentas uniformes vencidas

A partir de la fórmula (7.1a) se tiene:

$$S = R\left\{\frac{n[2+j(n-1)]}{2}\right\} \quad \text{Fórmula (7.1a)}$$

$$P(1+jn) = R\left\{\frac{n[2+j(n-1)]}{2}\right\} \quad \text{Al reemplazar S}$$

$$P = R\left\{\frac{n[2+j(n-1)]}{2(1+jn)}\right\}$$

$$\boxed{P = R\left\{\frac{n[2+j(n-1)]}{2(1+jn)}\right\}} \quad (7.5a)$$

La fórmula (7.5a) calcula el valor presente de una anualidad simple vencida bajo el régimen de interés simple, en el cual R, j y n son del mismo plazo.

El factor de actualización de la serie uniforme a interés simple fas

En la fórmula (7.5a) el término entre llaves se denomina *factor de actualización de la serie uniforme a interés simple para una tasa* j *y* n *períodos*. Dicho factor se simboliza $fas_{j;n}$; por lo tanto (7.5a) se representa:

$$\boxed{P = R \times fas_{j;n}} \quad (7.5b)$$

Ejemplo 7.5

¿Cuánto es el importe de un préstamo que devenga una TNA de 0,16 y se amortiza en el plazo de 1 año con cuotas uniformes trimestrales vencidas de 20 000 um cada una?

Solución

Con los datos n=4; R=20 000; j=0,04 y la fórmula (7.5) se calcula P.

$$P = R\left\{\frac{n[2+j(n-1)]}{2(1+jn)}\right\} \qquad P = 20\,000\left\{\frac{4[2+0{,}04(4-1)]}{2(1+0{,}04\times 4)}\right\}$$

$$P = 20\,000 \times 3{,}655172414 = 73\,103{,}45$$

En la siguiente tabla de amortización de la deuda puede comprobarse que efectivamente, cuatro cuotas uniformes de 20 000 um que devengan interés simple con una TNA de 0,16 amortizan un préstamo de 73 103,45 um.

M	Nº	R	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. Dev.
0					73103,45		73103,45	
1	1	20000	20000,00	0,00	53103,45	2924,14	56027,59	2924,14
2	2	20000	20000,00	0,00	33103,45	5048,28	38151,72	2124,14
3	3	20000	20000,00	0,00	13103,45	6372,41	19475,86	1324,14
4	4	20000	13103,45	6896,55	0,00	0,00	0,00	524,14
		80000	73103,45	6896,55				6896,55

7.6 R uniforme en función de P

Si se conocen el valor presente, la tasa de interés simple y el número de rentas uniformes de una anualidad simple vencida, puede calcularse el importe de su renta uniforme, al despejarla de la fórmula (7.5a).

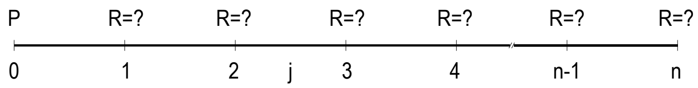


Figura 7.3 Diagrama de tiempo-valor que identifica las variables conocidas: P, j y n para obtener el importe de la renta uniforme vencida con interés simple.

$$P= R\left\{\frac{n[2+j(n-1)]}{2(1+jn)}\right\} \qquad \text{Fórmula (7.5a)}$$

$$\boxed{R = P\left\{\frac{2(1+jn)}{n[2+j(n-1)]}\right\}} \quad (7.6a)$$

La fórmula (7.6a) calcula el importe de la renta uniforme vencida de una anualidad simple bajo el régimen de interés simple, en función de su valor presente.

El factor de recuperación del capital a interés simple frc

En la ecuación anterior, el término entre llaves se denomina *factor de recuperación de capital a interés simple para una tasa* j *y* n *períodos*. Dicho factor se simboliza $frc_{j;n}$; por lo tanto (7.6a) se representa:

$$\boxed{R = P \times frc_{j;n}} \quad (7.6b)$$

Ejemplo 7.6

El día 20 de octubre, una empresa suscribió un contrato de préstamo de 1 000 um que devenga una TNA de 0,18. Este préstamo se amortizará a interés simple en el plazo de un año, con cuotas uniformes trimestrales vencidas.

a. Calcule el importe de la cuota uniforme vencida.
b. Formule del cuadro de servicio de la deuda, considere que el año no es bisiesto.

Solución

Con los datos: j =TNT=0,045; n=4; P=1 000 y con la fórmula (7.6) se tiene:

a. Importe de la renta uniforme.

$$R = P\left\{\frac{2(1+jn)}{n[2+j(n-1)]}\right\} \qquad R = 1\,000\left\{\frac{2(1+0{,}045\times4)}{4[2+0{,}045(4-1)]}\right\} = 1\,000 \times \frac{2{,}36}{8{,}54}$$

$$R = 1\,000 \times 0{,}276346604 = 276{,}35$$

b. Cuadro de servicio de la deuda a interés simple.

M	N°	Fecha	Días	R	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. Dev.
0		20/10	0				1 000,00		1 000,00	
1	1	18/01	90	276,35	276,35	0,00	723,65	45	768,65	45,00
2	2	18/04	180	276,35	276,35	0,00	447,31	78	524,87	32,56
3	3	17/07	270	276,35	276,35	0,00	170,96	98	268,65	20,13
4	4	15/10	360	276,35	170,96	105,39	0,00	0	0,00	7,69
			∑	1105,39	1000,00	105,39				105,39

Observe que el principal se rebaja con el importe de la cuota principal; y los intereses devengados acumulados, se pagan al final de la última cuota.

7.7 j en una anualidad vencida en función de P

Si se conocen el valor presente, el número de rentas uniformes vencidas y el importe de la renta uniforme, puede calcularse el valor de la tasa de interés simple de la anualidad, al despejarla de la fórmula (7.6a).

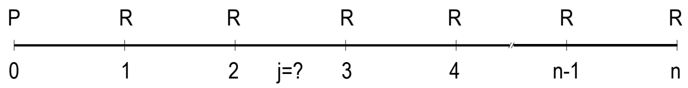


Figura 7.4 Diagrama de tiempo-valor que identifica las variables conocidas: P, R y n para obtener el valor de la tasa de interés simple.

$$R=\frac{2P(1+jn)}{n[2+j(n-1)]} \qquad \text{Fórmula (7.6a)}$$

$$\frac{2P(1+jn)}{n[2+j(n-1)]}= R$$

$$2P(1+jn)= Rn[2+j(n-1)]$$

$$2P+j2Pn= Rn(2+jn-j)$$

$$2P+j2Pn= 2Rn+jRn^2-jRn$$

$$j2Pn+jRn-jRn^2= 2Rn-2P$$

$$j(2Pn+Rn-Rn^2)= 2Rn-2P$$

$$j=\frac{2(Rn-P)}{2Pn+Rn-Rn^2}$$

$$j=\frac{2(Rn-P)}{n(2P+R-Rn)}$$

$$j=\frac{2(Rn-P)}{n[2P+R(1-n)]}$$

$$\boxed{j=\frac{2(nR-P)}{n[2P-(n-1)R]}} \qquad (7.7)$$

La fórmula (7.7) calcula la tasa de interés simple en una anualidad simple vencida, cuando se conoce P, R y n.

Ejemplo 7.7

Un préstamo de 37 321,42 um a interés simple, se canceló en el plazo de un año con cuotas uniformes trimestrales vencidas de 10 000 um. Calcule la TNT que se aplicó en esta operación a interés simple.

Solución

Con los datos n=4; R=10 000; P=37 321,42; y con la fórmula (7.7) se calcula j =TNT.

$$j=\frac{2(nR-P)}{n[2P-(n-1)R]} \qquad j=\frac{2(4\times 10\,000-37\,321{,}42)}{4[2\times 37\,321{,}42-(4-1)10\,000]}=\frac{5\,367{,}16}{178\,571{,}36}=0{,}03$$

Puede verificarse que al aplicar la TNT de 0,03 al préstamo de 37 321,42 um, se cancela con 4 cuotas uniformes de 10 000 um cada una, como se muestra a continuación.

M	N°	R	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
0					37321,42		37321,42	
1	1	10000	10000,00	0,00	27321,42	1119,65	28441,07	1119,65
2	2	10000	10000,00	0,00	17321,42	1939,29	19260,71	819,65
3	3	10000	10000,00	0,00	7321,42	2458,94	9780,36	519,64
4	4	10000	7321,42	2678,58	0,00	0,00	0,00	219,64
		40000	37321,42	2678,58				2678,58

7.8 n en una anualidad vencida en función de P

Si se conocen el valor presente, el importe de la renta uniforme vencida y la tasa de interés simple constante de una anualidad simple vencida, puede calcularse el número de períodos de tasa de interés, que a su vez es el número de rentas uniformes vencidas, al despejarla de la fórmula (7.6a).

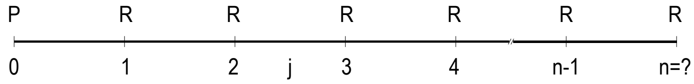


Figura 7.5 Diagrama de tiempo-valor que identifica las variables conocidas: P, R y n para obtener el valor de la tasa de interés simple.

$$n_{1;2} = \frac{j(2P+R) - 2R \pm \sqrt{[j(2P+R) - 2R]^2 + 8PRj}}{2Rj}$$

$$R = P\left\{\frac{2(1+jn)}{n[2+j(n-1)]}\right\} \qquad \text{Fórmula (7.6a)}$$

$$Rn[2 + j(n-1)] = 2P(1+jn)$$

$$Rn(2 + jn - j) = 2P + 2Pjn$$

$$2Rn + Rjn^2 - Rjn = 2P + 2Pjn$$

$$2Rn + Rjn^2 - Rjn - 2P - 2Pjn = 0$$

$$Rjn^2 + (2R - Rj - 2Pj)n - 2P = 0$$

$$Rjn^2 + [2R - j(2P+R)]n - 2P = 0$$

$$n_{1;2} = \frac{-[2R - j(2P+R)] \pm \sqrt{[2R - j(2P+R}}{2Rj}$$

$$n_{1;2} = \frac{j(2P+R) - 2R \pm \sqrt{[j(2P+R) - 2R]^2}}{2Rj}$$

$$\boxed{n_{1;2} = \frac{j(2P+R) - 2R \pm \sqrt{[j(2P+R) - 2R]^2 + 8PRj}}{2Rj}} \qquad (7.8)$$

$$n = \begin{cases} n = n_1 & si\ n_1\ es\ entero\ positivo; \\ n = n_2 & si\ n_2\ es\ entero\ positivo. \end{cases}$$

En el caso de que a partir de valores hipotéticos de P, R y j, n no resultara un valor entero positivo, entonces no existiría ninguna anualidad vencida simple cuyos valores de P, R y j sean iguales a los respectivos valores hipotéticos.

Ejemplo 7.8

¿Cuántas cuotas de trimestrales vencidas de 5 000 um cada una, serán necesarias para amortizar un préstamo de 19 074,07 um a interés simple? El préstamo devenga una TNA de 0,08.

Solución

Con los datos R=5 000; P=19 074,07; j =TNT=0,02 y con la fórmula (7.8) se calcula n.

$$n_{1;2} = \frac{j(2P+R) - 2R \pm \sqrt{[j(2P+R) - 2R]^2 + 8PRj}}{2Rj}$$

Sea $B = j(2P + R) - 2R$

$$B = 0{,}02(2 \times 19\ 074{,}07 + 5\ 000) - 2 \times 5\ 000 = -9137{,}037037$$

$$n = \frac{-9137{,}037037 \pm \sqrt{-9137{,}037037^2 + 8 \times 19\ 074{,}07 \times 5\ 000 \times 0{,}02}}{2 \times 5\ 000 \times 0{,}02}$$

$$n = \frac{-9137{,}037037 \pm \sqrt{-9137{,}037037^2 + 15259259{,}2593}}{200}$$

$$n = \frac{-9137{,}037037 + 9937{,}037037}{200} = \frac{800}{200} = 4$$

Puede verificarse que 4 cuotas uniformes de 5 000 um cada una, cancelan un préstamo de 19 074,07 que devenga interés simple.

M	Nº	R	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
0					19074,07		19074,07	
1	1	5000	5000,00	0,00	14074,07	381	14455,56	381,48
2	2	5000	5000,00	0,00	9074,07	663	9737,04	281,48
3	3	5000	5000,00	0,00	4074,07	844	4918,52	181,48
4	4	5000	4074,07	925,93	0,00	0	0,00	81,48
		20000	19074,07	925,93				925,93

B. Anualidades anticipadas

7.9 Valor futuro o monto final de una anualidad anticipada

En el caso que las rentas uniformes Ra sean a término anticipado, es decir que se efectúen al inicio de cada período de tasa, el valor futuro o monto final S al final del momento n, se acumulará tal como se muestra en el siguiente diagrama.

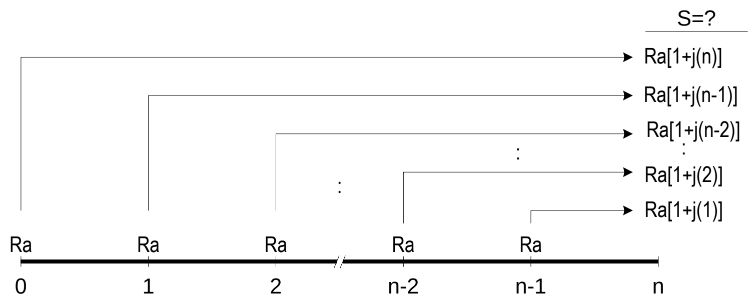


Figura 7.6 Diagrama de tiempo-valor que acumula un monto simple con depósitos anticipados, al final del momento n.

El valor futuro o monto final de la anualidad simple anticipada será entonces igual a:

$$\begin{aligned} S= \; & R_a[1+j(1)] \\ & +R_a[1+j(2)] \\ & \vdots \\ & +R_a[1+j(n-2)] \\ & +R_a[1+j(n-1)] \\ & +R_a[1+jn] \end{aligned}$$

El segundo miembro de la ecuación anterior es la suma de una progresión aritmética de n términos, donde su primer y último término es $a_1 = R_a(1+j)$ y $a_n = R(1+jn)$, respectivamente; y se resuelve con la fórmula $S = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

$$S = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

$$S = \frac{n[R_a(1+j) + R_a(1+jn)]}{2}$$

$$S = \frac{nR_a[(1+j) + (1+jn)]}{2}$$

$$S = \frac{nR_a(2+j+jn)}{2}$$

$$S = \frac{nR_a[2+j(1+n)]}{2}$$

$$S = \frac{nR_a[2+j(n+1)]}{2}$$

Al reagrupar los factores anteriores se tiene:

$$\boxed{S = R_a\left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2}\right\}} \quad (7.9a)$$

La fórmula (7.9a) calcula el valor futuro o monto de una anualidad anticipada bajo el régimen de interés simple, en el cual Ra, j y n son del mismo plazo.

El factor de capitalización de la serie uniforme anticipada a interés simple fcs

En la fórmula (7.9a) el término entre llaves se denomina *factor de capitalización de la serie anticipada a interés simple para una tasa* j *y* n *períodos*. Dicho factor se simboliza $fcs_{j;n}$. Por lo tanto (7.9a) se representa:

$$\boxed{S = R_a \times fcs_{j;n}} \quad (7.9b)$$

Ejemplo 7.9

El día 20 de octubre una empresa firmó un contrato para depositar cada 90 días durante el plazo de un año un importe de 1 000 um en un banco, estos depósitos devengan una TNA de 0,18. El primer depósito anticipado se efectuará el 20 de octubre.

a. Calcule el monto que se acumulará al término del plazo pactado (día 360).
b. Formule del cuadro de acumulación del monto o valor futuro (considere que el año no es bisiesto).

Solución

Con los datos: j =TNT=0,045; n=4; Ra=1 000 y con la fórmula (7.9a) se tiene:

a. Monto que se acumulará al término del plazo pactado.

$$S = R_a\left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2}\right\} \qquad S = 1\ 000\left\{\frac{4[2+0{,}045(4+1)]}{2}\right\} = 1\ 000 \times \frac{8{,}9}{2}$$

$$S = 1\ 000 \times 4{,}45 = 4\ 450$$

b. Cuadro de acumulación del fondo a interés simple con depósitos anticipados.

El monto en cualquier momento es igual al monto anterior, más el depósito efectuado al fondo (columna Ra), más el interés simple acumulado (Interés); así el monto de 4 270 um al 17/07 es igual a 3 135+1 000+135.

M	N°	Fecha	Días	Ra	Nº*Ra	Interés	Monto
0	1	20/10	0	1 000	1 000		1 000
1	2	18/01	90	1 000	2 000	45	2 045
2	3	18/04	180	1 000	3 000	90	3 135
3	4	17/07	270	1 000	4 000	135	4 270
4		15/10	360			180	4 450

7.10 Ra uniforme de una anualidad en función de S

A partir de la fórmula (7.9a) puede despejarse la variable Ra.

$$S = R_a\left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2}\right\}$$ Fórmula (7.9a)

$$\boxed{R_a = S\left\{\frac{2}{n[2+j(n+1)]}\right\}} \quad (7.10a)$$

La fórmula (7.10a) calcula el importe de la renta uniforme de una anualidad anticipada bajo el régimen de interés simple, en el cual Ra, j y n son del mismo plazo.

El factor de depósito al fondo de amortización a interés simple fdfa

En la fórmula (7.10a) el término entre llaves se denomina factor de depósito al fondo de amortización a interés simple en una anualidad anticipada, para una tasa j y n períodos. Dicho factor se simboliza $fdfa_{j;n}$. Por lo tanto (7.10a) se representa:

$$\boxed{R_a = S \times fdfa_{j;n}} \quad (7.10b)$$

Ejemplo 7.10

En el plazo de un año se requiere acumular un monto de 4 450 um con depósitos uniformes trimestrales anticipados, los mismos que serán colocados en una cuenta a interés simple cuya TNA es 0,18. ¿Cuánto es el importe de cada depósito anticipado o imposición?

Solución

Con los datos S=4 450; n=4; j =TNT=0,045; y con la fórmula (7.10) se calcula R_a.

$$R_a = S\left\{\frac{2}{n[2+j(n+1)]}\right\} \qquad R_a = 4\ 450\left\{\frac{2}{4[2+0{,}045(4+1)]}\right\} = 4\ 450 \times \frac{2}{8{,}9}$$

$$R_a = 4\ 450 \times 0{,}224719101 = 1\ 000$$

En la siguiente tabla de acumulación de un valor futuro se muestra que con 4 cuotas anticipadas se acumula el monto o valor futuro de 4 450 um, al final del cuarto trimestre.

M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto
0	1	1000	1000		1000
1	2	1000	2000	45	2045
2	3	1000	3000	90	3135
3	4	1000	4000	135	4270
4				180	4450
		4000		450	

7.11 j de una anualidad anticipada en función de S

A partir de la fórmula (7.9a) se tiene:

$$S = R_a\left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2}\right\} \quad \text{Fórmula (7.9a)}$$

$$\frac{n[2+j(n+1)]}{2} = \frac{S}{R_a}$$

$$n[2+j(n+1)] = \frac{2S}{R_a}$$

$$2n + jn(n+1) = \frac{2S}{R_a}$$

$$jn(n+1) = \frac{2S}{R_a} - 2n$$

$$jn(n+1) = \frac{2S - 2R_a n}{R_a}$$

$$jn(n+1) = \frac{2(S - R_a n)}{R_a}$$

$$\boxed{j = \frac{2(S - R_a n)}{R_a n(n+1)}} \quad (7.11)$$

La fórmula (7.11) calcula la tasa de interés simple de una anualidad anticipada que devenga interés simple, en función de su valor futuro.

Ejemplo 7.11
En el plazo de un año se acumuló un monto simple de 4 450 um al depositar 1 000 um cada inicio de trimestre. Calcule la TNT a la que fueron colocados dichos depósitos, en esta operación a interés simple.

Solución
Con los datos S=4 450; n=4; R_a=1 000; y con la fórmula (7.7) se calcula j =TNT.

$$j = \frac{2(S-R_a n)}{R_a n(n+1)} \qquad TNT = \frac{2(4\,450-1\,000\times4)}{1\,000\times4(4+1)} = \frac{900}{20\,000} = 0{,}045$$

En la siguiente tabla de acumulación del monto o valor futuro de la anualidad, se comprueba que con la tasa nominal trimestral de 0,045 se acumula el monto de 4 450 um.

M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto
0	1	1000	1000		1000
1	2	1000	2000	45	2045
2	3	1000	3000	90	3135
3	4	1000	4000	135	4270
4				180	4450
		4000		450	

7.12 n de una anualidad anticipada en función de S

A partir de la fórmula (7.9a) se tiene:

$$S= R_a\left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2}\right\} \qquad \text{Fórmula (7.9a)}$$

$$\frac{n[2+j(n+1)]}{2}= \frac{S}{R_a}$$

$$n[2+j(n+1)]= \frac{2S}{R_a}$$

$$n(2+jn+j)= \frac{2S}{R_a}$$

$$2n+jn^2+jn= \frac{2S}{R_a}$$

$$2n+jn^2+jn-\frac{2S}{R_a}= 0$$

$$jn^2+(2+j)n-\frac{2S}{R_a}= 0$$

$$R_a jn^2+R_a(2+j)n-2S= 0$$

$$n_{1;2}= \frac{-R_a(2+j)\pm\sqrt{[-R_a(2+j)]^2-4(R_a j)(-2S)}}{2Rj}$$

$$\boxed{n_{1;2}=\frac{-R_a(2+j)\pm\sqrt{[R_a(2+j)]^2+8R_a jS}}{2R_a j}} \qquad (7.12)$$

$$n=\begin{cases} n=n_1 & si\ n_1\ es\ entero\ positivo;\\ n=n_2 & si\ n_2\ es\ entero\ positivo.\end{cases}$$

En el caso de que a partir de valores hipotéticos de S, Ra y j, n no resultara un valor entero positivo, entonces no existiría ninguna anualidad anticipada simple cuyos valores de S, Ra y j sean iguales a los respectivos valores hipotéticos.

Ejemplo 7.12
¿Cuántas cuotas uniformes trimestrales anticipadas de un importe de 1 000 um cada una, serán necesarias depositar en un banco, para acumular a interés simple un monto de 4 450 um? Los depósitos devengan una TNT de 0,045.

Solución
Con los datos: Ra=1 000; j =TNT= 0,045; S=4 450 y con la fórmula (7.12) se calcula n:

$$n=\frac{-R_a(2+j)\pm\sqrt{[R_a(2+j)]^2+8R_a jS}}{2R_a j}$$

Sea $B=-R_a(2+j) \rightarrow B=-1\,000(2+0{,}045)=-2\,045$

$$n=\frac{-2\,045\pm\sqrt{2\,045^2+8\times 1\,000\times 0{,}045\times 4\,450}}{2\times 1\,000\times 0{,}045}$$

$$n=\frac{-2\,045\pm\sqrt{4\,182\,025+1\,602\,000}}{90}=\frac{-2\,045+2\,405}{90}=4$$

En el siguiente cuadro de acumulación del monto o valor futuro de la anualidad anticipada, puede comprobarse que 4 cuotas anticipadas de 1 000 um cada una acumulan un monto de 4 450 um al final del cuarto trimestre.

M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto
0	1	1000	1000		1000
1	2	1000	2000	45	2045
2	3	1000	3000	90	3135
3	4	1000	4000	135	4270
4				180	4450
		4000		450	

7.13 Valor de P en una anualidad anticipada

A partir de la fórmula (7.9) que obtiene el valor futuro o monto de una anualidad anticipada que devenga interés simple en el momento n (fin del horizonte temporal), puede obtenerse su respectivo valor presente.

$$S = R_a\left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2}\right\} \qquad \text{Fórmula (7.9)}$$

$$P(1+jn) = R_a\left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2}\right\}$$

$$P = R_a\left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2} \times \frac{1}{1+jn}\right\}$$

$$\boxed{P = R_a\left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2(1+jn)}\right\}} \quad (7.13)$$

La fórmula (7.13) calcula el valor de P de una anualidad con rentas uniformes anticipadas, que devengan interés simple en el cual el período de la tasa j y de n tienen que ser del mismo período de R. Este valor presente es el equivalente financiero de acumular con interés simple todas las rentas anticipadas hacia el momento n, como se observa en la figura 7.7.

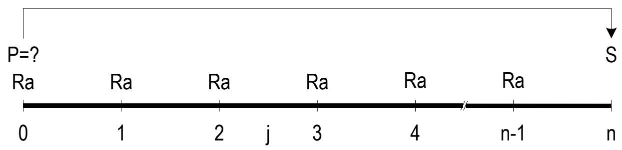


Figura 7.7 Valor presente equivalente de un monto al final del horizonte temporal.

Es importante aclarar que con esta fórmula no se puede amortizar una deuda que devenga interés simple, porque los intereses simples se capitalizan al término del horizonte temporal, es decir en el momento n, y el horizonte del presente modelo sólo incluye n-1 períodos.

Ejemplo 7.13
Con una TNA de 0,12 calcule el valor de P de 4 rentas trimestrales anticipadas de 5 000 um cada una. Este valor presente debe ser equivalente a su respectivo valor futuro al final del momento 4.

Solución
Con los datos Ra=5 000; n=4; j =TNT=0,03 y la fórmula (7.13) se calcula P.

$$P = R_a\left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2(1+jn)}\right\} \qquad P = 5\ 000\left\{\frac{4\times[2+0{,}03(4+1)]}{2(1+0{,}03\times 4)}\right\} = 5\ 000 \times \frac{8{,}6}{2{,}24}$$

$$P = 5\ 000 \times 3{,}839285714 = 19\ 196{,}43$$

Puede comprobarse que el valor presente=19 196,43 um es equivalente a su respectivo valor futuro al final del trimestre 4.

$$S = P(1+jn) \qquad S = 19\ 196{,}43(1+0{,}03\times 4) = 21\ 500$$

Lo anteriormente calculado se prueba con la siguiente tabla de acumulación del valor futuro al final del momento cuatro, que asciende a 21 500 um.

M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto
0	1	5000	5000		5000
1	2	5000	10000	150	10150
2	3	5000	15000	300	15450
3	4	5000	20000	450	20900
4				600	21500
		20000		1500	

7.14 Ra uniforme de una anualidad en función de P

A partir de la fórmula (7.13) puede despejarse Ra.

$P = R_a \left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2(1+jn)}\right\}$ Fórmula (7.13)

$$\boxed{R_a = P \left\{\frac{2(1+jn)}{n[2+j(n+1)]}\right\}} \quad (7.14)$$

La fórmula (7.14) calcula la renta uniforme anticipada de una anualidad que devenga interés simple.

Ejemplo 7.14

Calcule el importe de la renta uniforme trimestral anticipada que podría cancelar un préstamo de 20 000 um con 4 pagos cada uno de los cuales se efectúa a inicios de cada trimestre; el préstamo devenga una TNA de 0,12. Verifique si el importe de la cuota cancela verdaderamente este préstamo a interés simple.

Solución

Con los datos n=4; P=20 000; j =TNT=0,03 y la fórmula (7.14) se calcula Ra.

$R_a = P \left\{\frac{2(1+jn)}{n[2+j(n+1)]}\right\}$ $R_a = 20\,000 \left\{\frac{2(1+0,03\times 4)}{4[2+0,03(4+1)]}\right\} = 20\,000 \times \frac{2,24}{8,6}$

$$R_a = 20\,000 \times 0,260465116 = 5\,209,30$$

M	Nº	Ra	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
0	1	5209,30	5209,30	0,00	14790,70		14790,70	
1	2	5209,30	5209,30	0,00	9581,40	443,72	10025,12	443,72
2	3	5209,30	5209,30	0,00	4372,09	731,16	5103,26	287,44
3	4	5209,30	4346,98	862,33	25,12	0,00	25,12	131,16
4								
		20837,21	19974,88	862,33				862,33

Puede comprobarse que el importe de la cuota calculada no cancela el importe del préstamo (sólo llega a devolverse 19 974,81 um); lo que significa que esta fórmula no debe emplearse para amortizaciones de préstamo con interés simple.

7.15 j de una anualidad anticipada en función de P

A partir de la fórmula (7.13) puede despejarse j.

$$P=\frac{nR_a[2+j(n+1)]}{2(1+jn)} \qquad \text{Fórmula (7.13)}$$

$$2P(1+jn)= nR_a[2+j(n+1)]$$

$$2P+2Pjn= 2nR_a+jR_an(n+1)$$

$$2Pjn-jR_an(n+1) = 2nR_a-2P$$

$$jn[2P-R_a(n+1)] = 2(nR_a-P)$$

$$j=\frac{2(nR_a-P)}{n[2P-R_a(n+1)]}$$

$$\boxed{j=\frac{2(nR_a-P)}{n[2P-R_a(n+1)]}} \qquad (7.15)$$

La fórmula (7.15) calcula la tasa nominal de una anualidad anticipada que devenga interés simple.

Ejemplo 7.15

Qué TNA se aplicó para hallar el valor presente de 191 964,29 um equivalente al monto que se acumulará al final del cuarto trimestre con cuatro rentas trimestrales anticipadas de 50 000 um cada una. Verifique que el importe de ese valor presente, es equivalente al monto acumulado de las cuatro rentas al final del cuarto trimestre.

Solución

Con los datos n=4; Ra=50 000; P=191 964,29; y la fórmula (7.15) se calcula j =TNT.

$$j=\frac{2(nR_a-P)}{n[2P-R_a(n+1)]} \qquad j=\frac{2(4\times 50\,000-191\,964{,}29)}{4[2\times 191\,964{,}29-50\,000(4+1)]}=\frac{16\,071{,}42}{535\,714{,}32}=0{,}03$$

La TNA anual es 0,12 (0,03×4).

El valor futuro de 191 964,29 um al final del trimestre 4 llevado con la TNA=0,12 es 21 500 um.

$$S=P(1+jn) \qquad S=191\,964{,}29\left(1+\frac{0{,}12}{4}\times 4\right)=215\,000$$

Este valor futuro de 215 000 um es equivalente al monto de las 4 rentas anticipadas acumuladas a interés simple hasta el final del cuarto trimestre, como se comprueba con la siguiente tabla de acumulación del monto de la anualidad.

M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto
0	1	50000	50000		50000
1	2	50000	100000	1500	101500
2	3	50000	150000	3000	154500
3	4	50000	200000	4500	209000
4				6000	215000
		200000		15000	

7.16 n en una anualidad anticipada en función de P

Si se conocen el valor presente, el importe de las rentas uniformes anticipadas y la tasa de interés simple de la anualidad, puede despejarse la fórmula para el cálculo de n a partir de la fórmula (7.14).

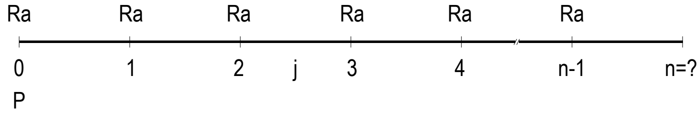


Figura 7.8 Diagrama de tiempo-valor que identifica las variables conocidas: P, Ra y j para obtener el valor de n.

$$R_a = P\left\{\frac{2(1+jn)}{n[2+j(n+1)]}\right\} \qquad \text{Fórmula (7.14)}$$

$$nR_a[2+j(n+1)] = 2P(1+jn)$$

$$nR_a(2+jn+j) = 2P + 2Pjn$$

$$2R_an + jR_an^2 + jR_an = 2P + 2Pjn$$

$$2R_an + jR_an^2 + jR_an - 2P - 2Pjn = 0$$

$$jR_an^2 + (2R_a + jR_a - 2Pj)n - 2P = 0$$

$$jR_an^2 + [R_a(2+j) - 2Pj]n - 2P = 0$$

$$n_{1;2} = \frac{-[R_a(2+j) - 2Pj] \pm \sqrt{[R_a(2+j) - 2Pj]^2 - 4(jR_a)(-2P)}}{2jR_a}$$

$$\boxed{n_{1;2} = \frac{2Pj - R_a(2+j) \pm \sqrt{[2Pj - R_a(2+j)]^2 + 8PR_aj}}{2jR_a}} \qquad (7.16)$$

$$n = \begin{cases} n = n_1 & si\ n_1\ es\ entero\ positivo; \\ n = n_2 & si\ n_2\ es\ entero\ positivo. \end{cases}$$

En el caso de que a partir de valores hipotéticos de S, R y j, n no resultara un valor entero positivo, entonces no existiría ninguna anualidad vencida simple cuyos valores de S, R y j sean iguales a los respectivos valores hipotéticos.

Ejemplo 7.16

¿Con cuántas cuotas trimestrales anticipadas de 60 000 um que devengan una TNA de 0,08 se acumulará un monto de 252 000 um al final del cuarto trimestre, equivalente a un valor presente de 233 333,33 um en el momento 0?

Solución

Con los datos P=233 333,33; Ra=60 000; j=0,02; y la fórmula (7.16) se calcula n.

$$n_{1;2} = \frac{2Pj - R_a(2+j) \pm \sqrt{[2Pj - R_a(2+j)]^2 + 8PR_aj}}{2jR_a}$$

Sea $B = 2Pj - R_a(2+j)$

$$B = 2 \times 233\,333{,}33 \times 0{,}02 - 60\,000(2 + 0{,}02) = -111\,866{,}67$$

$$n = \frac{-111\,866{,}67 \pm \sqrt{111\,866{,}67^2 + 8 \times 233\,333{,}33 \times 60\,000 \times 0{,}02}}{2 \times 0{,}02 \times 60\,000}$$

$$n = \frac{-111\,866{,}67 \pm \sqrt{111\,866{,}67^2 + 2240000000}}{2\,400}$$

$$n = \frac{-111\,866{,}67 + 121466{,}6667}{2\,400} = \frac{9\,600}{2\,400} = 4$$

En el siguiente cuadro de acumulación del monto o valor futuro de la anualidad anticipada, puede comprobarse que 4 cuotas anticipadas de 60 000 um cada una acumulan un monto de 252 000 um al final del cuarto trimestre.

M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto
0	1	60000	60000		60000
1	2	60000	120000	1200	121200
2	3	60000	180000	2400	183600
3	4	60000	240000	3600	247200
4				4800	252000
		240000		12000	

Puede verificarse que el valor presente de 233 333,33 um es equivalente a su respectivo valor futuro al final del momento cuatro.

$S = P(1 + jn)$ $\qquad$ $S = 233\,333{,}33\left(1 + \frac{0{,}08}{4} \times 4\right) = 252\,000$

Si se hubiese otorgado un préstamo de 233 333,33 um es imposible que se cancele en la última cuota, porque en interés simple los intereses solo se efectivizan al termino del horizonte temporal que corresponde al momento n; en cambio en la anualidad anticipada el último pago se hace en el momento n-1.

C. Anualidades truncas

7.17 Valor futuro o monto final de una anualidad anticipada trunca

En concordancia con lo señalado en el capítulo 1, una *anualidad anticipada trunca* es aquella en la cual:

- se produce una renta al inicio de cada período de renta, y además,
- se produce una renta al término del horizonte temporal,
- el número de rentas o cuotas, designado n_c no coincide con el número de períodos de renta, designado n, sino que se cumple:

$n = n_c – 1$

De acuerdo con la ecuación anterior se tiene que el número de cuotas n_c de una anualidad anticipada trunca es igual al número de períodos de renta aumentada en uno; es decir:

$n_c = n + 1$

Por ejemplo, si se tiene la siguiente anualidad anticipada trunca:

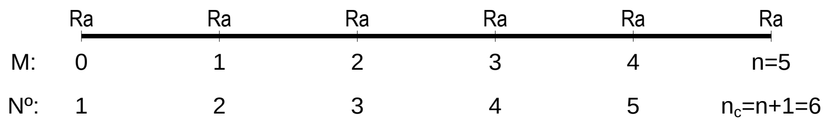


Figura 7.9 Anualidad anticipada trunca con 5 momentos, y 6 rentas anticipadas, donde el número de momentos es igual a n_c-1=5.

En la presente sección se asume que la anualidad anticipada trunca es una anualidad simple bajo un régimen de interés simple, en la cual se cumple el siguiente supuesto:

(i) el principal se cancela al pagar la última cuota.

Dado que en el interés simple es un régimen de interés monocapitalizado en el cual se aplica el método PPLI (en la cual se da preferencia al principal sobre el interés), se cumplirán los siguientes supuestos:

(ii) el único momento de capitalización de intereses será el momento $n = n_c$-1.

(iii) en el caso de que la anualidad corresponda al pago de un préstamo, su última cuota necesariamente incluirá el pago del íntegro del interés devengado.

Con fecha focal en el momento $n = n_c$-1 se representan las variables R_a, P, j y n, en la anualidad con rentas anticipadas de la figura 7.10, para calcular el valor futuro S.

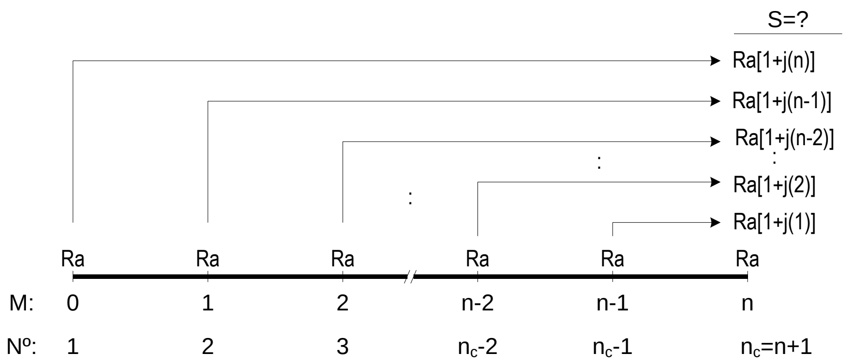


Figura 7.10 Anualidad simple anticipada trunca cuyas rentas se han llevado hasta n_c-1 para deducir la fórmula del valor futuro S.

Del gráfico se aprecia que la anualidad simple anticipada trunca de cuotas uniformes y de n períodos puede ser visto como una anualidad simple anticipada tradicional de cuotas uniformes también de n períodos a la que se le ha incorporado una renta uniforme adicional al término del horizonte temporal (momento n). En consecuencia el valor futuro de la anualidad anticipada trunca será igual al valor futuro de la anualidad anticipada tradicional aumentado en el importe de la cuota anticipada uniforme. Si se designa S al valor futuro de la anualidad anticipada trunca y S_A al valor de la anticipada tradicional, se tiene:

$$S_A = R_a \left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2}\right\} \qquad \text{Fórmula (7.9a)}$$

$$S = S_A + R_a$$

$$S = R_a \left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2}\right\} + R_a$$

$$S = R_a \left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2} + 1\right\}$$

$$S = R_a \left\{\frac{n[2+j(n+1)]+2}{2}\right\}$$

$$S = R_a \left[\frac{2n+jn(n+1)+2}{2}\right]$$

$$S = R_a \left[\frac{2n+2+jn(n+1)}{2}\right]$$

$$S = R_a \left[\frac{2(n+1)+jn(n+1)}{2}\right]$$

La expresión anterior puede expresarse como la fórmula (7.17a)

$$\boxed{S = R_a \left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2}\right]} \; (7.17a) \qquad \boxed{S = R_a \left[\frac{n_c(2+jn)}{2}\right]} \; (7.17b)$$

Dado que n_c=n+1, la fórmula (7.17a) puede reexpresarse como (7.17b). Estas fórmulas calculan el valor futuro o monto de una anualidad simple anticipada trunca bajo el régimen de interés simple, en función de Ra, j, n_c y n.

Ejemplo 7.17
En una cuenta se hacen depósitos trimestrales de 5 000 um al inicio de cada trimestre. La cuenta devenga intereses a una TNA constante de 0,12. Calcule el monto acumulado al inicio del quinto trimestre. La cuenta no se cierra en esa fecha.

Solución
El momento de evaluación es el inicio del quinto trimestre, el cual coincide con el final del cuarto trimestre. Se tiene entonces que el número de cuotas es n_c es 5, mientras que el número de períodos es n=4 (es decir n_c-1).

	Ra=5000	Ra=5000	Ra=5000	Ra=5000	Ra=5000
M	0	1	2	3	n=4
Nº	1	2	3	4	n_c=n+1=5

Con los datos Ra=5 000; n=4; j =TNT=0,03; y la fórmula (7.17a) se calcula S al momento de evaluación de la manera siguiente.

$$S = R_a \left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2}\right] \qquad S = 5\,000 \left[\frac{(4+1)(2+0{,}03\times 4)}{2}\right] = 5\,000 \times \frac{10{,}6}{2} = 26\,500$$

La siguiente tabla de acumulación comprueba el monto de 26 500 um en esta anualidad trunca.

M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto
0	1	5000	5000		5000
1	2	5000	10000	150	10150
2	3	5000	15000	300	15450
3	4	5000	20000	450	20900
4	5	5000	25000	600	26500
		25000		1500	

7.18 Ra uniforme de una anualidad trunca en función de S

A partir de la fórmula (7.17a) puede despejarse Ra que es la renta anticipada trunca.

$S = R_a\left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2}\right]$ Fórmula (7.17a)

$$\boxed{R_a = S\left[\frac{2}{(n+1)(2+jn)}\right]} \quad (7.18)$$

La fórmula (7.18) calcula la renta uniforme anticipada en una anualidad trunca.

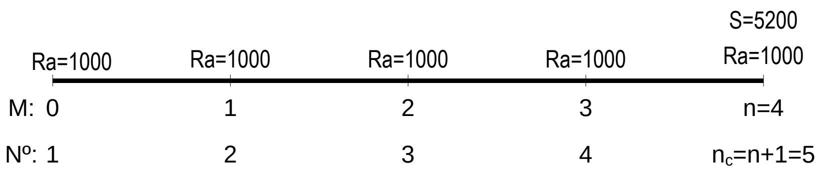
Ejemplo 7.18
Calcule el importe de la renta uniforme anticipada que acumula un monto simple de 5 200 um al final de un año, con 5 depósitos trimestrales anticipados. Estos depósitos devengan una TNA de 0,08.

Solución
Con los datos S=5 200; n=4; j =TNT=0,02; y la fórmula (7.18) se calcula Ra.

$R_a = S\left[\frac{2}{(n+1)(2+jn)}\right]$ $R_a = 5\ 200\left[\frac{2}{(4+1)(2+0{,}02\times4)}\right] = 5\ 200 \times \frac{2}{10{,}4}$

$$R_a = 5\ 200 \times 0{,}192307692 = 1\ 000$$

M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto
0	1	1000	1000		1000
1	2	1000	2000	20	2020
2	3	1000	3000	40	3060
3	4	1000	4000	60	4120
4	5	1000	5000	80	5200
		5000		200	



7.19 j en una anualidad anticipada trunca en función de S

A partir de la fórmula (7.17a) se tiene:

$$S = R_a\left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2}\right] \quad \text{Fórmula (7.17a)}$$

$$\frac{(n+1)(2+jn)}{2} = \frac{S}{R_a}$$

$$(n+1)(2+jn) = \frac{2S}{R_a}$$

$$2n + 2 + jn^2 + jn = \frac{2S}{R_a}$$

$$jn(n+1) = \frac{2S}{R_a} - 2n - 2$$

$$jn(n+1) = \frac{2S - 2R_a(n+1)}{R_a}$$

$$jn(n+1) = \frac{2[S - R_a(n+1)]}{R_a}$$

$$\boxed{j = \frac{2[S - R_a(n+1)]}{R_a n(n+1)}} \quad (7.19)$$

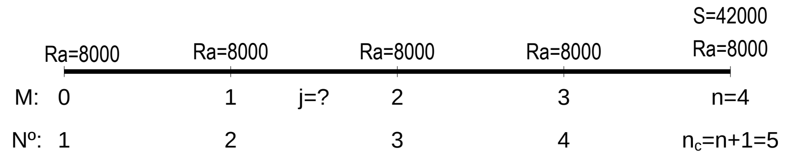
La fórmula (7.19) calcula la tasa de interés simple de una anualidad anticipada trunca que devenga interés simple, en función de su valor futuro.

Ejemplo 7.19
Calcule la TNA que se aplicó para acumular un monto de 42 000 um en el período de un año, con rentas uniformes trimestrales anticipadas de 8 000 um que devengan interés simple.

Solución
Con los datos S=42 000; Ra=8 000; n=4; y la fórmula (7.19) se calcula j =TNT.

$j = \frac{2[S-R_a(n+1)]}{R_a n(n+1)}$ $\qquad$ $j = \frac{2[42\,000-8\,000(4+1)]}{8\,000\times 4(4+1)} = \frac{4\,000}{160\,000} = 0{,}025$

La TNA es 0,1; es decir 0,025 trimestral multiplicado por 4 trimestres.



Observe que en el período de un año se han realizado 5 depósitos anticipados de 8 000 um. La tabla de acumulación del monto se muestra a continuación

M	Nº	R	NºR	Interés	Monto
0	1	8000	8000		8000
1	2	8000	16000	200	16200
2	3	8000	24000	400	24600
3	4	8000	32000	600	33200
4	5	8000	40000	800	42000
	Σ	40000		2000	

7.20 n en una anualidad anticipada trunca en función de S

A partir de la fórmula (7.17a) se tiene:

$$S = R_a\left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2}\right] \qquad \text{Fórmula (7.17a)}$$

$$\frac{(n+1)(2+jn)}{2} = \frac{S}{R_a}$$

$$(n+1)(2+jn) = \frac{2S}{R_a}$$

$$2n + 2 + jn^2 + jn = \frac{2S}{R_a}$$

$$2n + 2 + jn^2 + jn - \frac{2S}{R_a} = 0$$

$$jn^2 + 2n + jn + 2 - \frac{2S}{R_a} = 0$$

$$jn^2 + (2+j)n + 2 - \frac{2S}{R_a} = 0$$

$$R_a jn^2 + R_a(2+j)n + 2R_a - 2S = 0$$

$$R_a jn^2 + R_a(2+j)n + 2(R_a - S) = 0$$

$$n_{1;2} = \frac{-R_a(2+j) \pm \sqrt{[R_a(2+j)]^2 - 4(R_a j)[2(R_a - S)]}}{2R_a j}$$

$$n_{1;2} = \frac{-R_a(2+j) \pm \sqrt{[R_a(2+j)]^2 - 8R_a j(R_a - S)}}{2R_a j}$$

$$\boxed{n_{1;2} = \frac{-R_a(2+j) \pm \sqrt{[R_a(2+j)]^2 + 8R_a j(S - R_a)}}{2R_a j}} \qquad (7.20)$$

$$n = \begin{cases} n = n_1 & si\ n_1\ es\ entero\ positivo; \\ n = n_2 & si\ n_2\ es\ entero\ positivo. \end{cases}$$

En el caso de que a partir de valores hipotéticos de S, Ra y j, n no resultara un valor entero positivo, entonces no existiría ninguna anualidad anticipada simple cuyos valores de S, Ra y j sean iguales a los respectivos valores hipotéticos.

Ejemplo 7.20

¿Cuántas cuotas uniformes trimestrales uniformes anticipadas de 5 000 um deben colocarse en un banco para acumular un monto de 26 000 um? Los depósitos devengan una TNA de 0,08 y la anualidad es anticipada trunca.

Solución

Con los datos Ra=5 000; j =TNT=0,02; S=26 000; y la fórmula (7.20) se calcula n_c.

$$n_{1;2} = \frac{-R_a(2+j) \pm \sqrt{[R_a(2+j)]^2 + 8R_a j(S - R_a)}}{2R_a j}$$

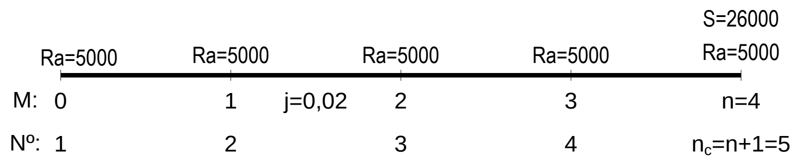
Sea $B = R_a(2+j)$ $\quad B = 5\,000(2+0{,}02) = 10\,100$

$$n_{1;2} = \frac{-10\,100 \pm \sqrt{10\,100^2 + 8 \times 5\,000 \times 0{,}02(26\,000 - 5\,000)}}{2 \times 5\,000 \times 0{,}02}$$

$$n_{1;2} = \frac{-10\,100 \pm \sqrt{102010000 + 16800000}}{200} = \frac{-10100 + 10900}{200} = \frac{800}{200} = 4$$

Puede comprobarse que con 5 rentas anticipadas truncas ($n_c=n+1$) se acumula un monto de 26 000 um con una TNA de 0,08.

M	Nº	R	NºR	Interés	Monto
0	1	5000	5000		5000
1	2	5000	10000	100	10100
2	3	5000	15000	200	15300
3	4	5000	20000	300	20600
4	5	5000	25000	400	26000
		25000		1000	



7.21 Valor de P de una anualidad anticipada trunca

A partir de la fórmula (7.17a) que calcula el valor futuro o monto de una anualidad simple anticipada trunca bajo el régimen de interés simple, en función de Ra, j, n_c y n, puede obtenerse su respectivo valor de P.

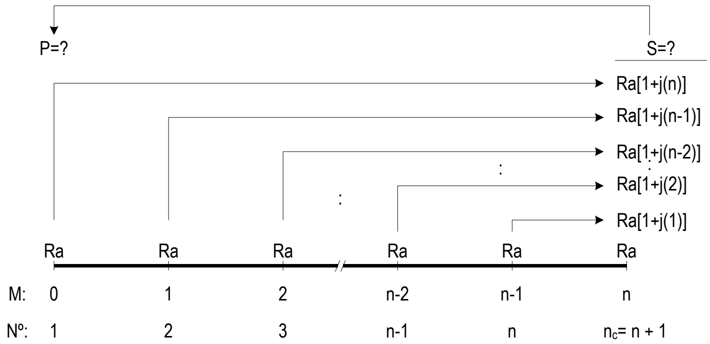


Figura 7.11 Anualidad anticipada trunca cuyas rentas se han llevado hasta el momento n para deducir la fórmula del valor futuro S y luego obtener su respectivo valor de P.

$$S = R_a\left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2}\right] \quad \text{Fórmula (7.17a)}$$

$$P(1+jn) = R_a\left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2}\right] \quad \text{Al reemplazar S}$$

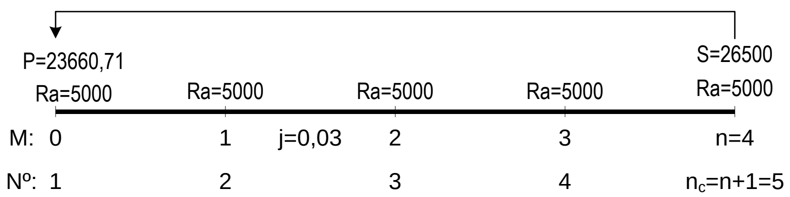
$$\boxed{P = R_a\left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2(1+jn)}\right]} \quad (7.21)$$

La fórmula (7.21) calcula el valor de P en una anualidad anticipada trunca bajo el régimen de interés simple, en el cual R, j y n son del mismo plazo. Como se ve en la figura 7.11 el valor de P es el resultado de capitalizar las rentas en el momento n y luego descontar ese stock final hacia el momento 0.

Ejemplo 7.21
Calcule el valor de P de una anualidad anticipada trunca de 5 rentas uniformes trimestrales de 5 000 um cada una. Las rentas devengan interés simple con una TNA de 0,12.
Solución
Con los datos Ra=5 000; n=4; j =TNT=0,03; y la fórmula (7.21) se calcula P de esta anualidad anticipada trunca.

$$P = R_a\left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2(1+jn)}\right] \qquad P = 5\ 000\left[\frac{(4+1)(2+0{,}03\times4)}{2(1+0{,}03\times4)}\right]$$

$$P = 5\ 000 \times 4{,}73214286 = 23\ 660{,}71$$



Observe que el valor de P en el momento 0, es el equivalente de capitalizar todas las rentas en el momento 4 y luego descontar este valor futuro hacia el momento 0.

M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto
0	1	5000	5000		5000
1	2	5000	10000	150	10150
2	3	5000	15000	300	15450

3	4	5000	20000	450	20900
4	5	5000	25000	600	26500
	Σ	25000		1500	

$P = \frac{S}{1+jn}$ $\qquad P = \frac{26\,500}{1+0{,}03\times 4} = 23\,660{,}71$

Es importante aclarar que si *incorrectamente* se descuentan cada una de las rentas hacia el momento 0 el valor presente de la anualidad será 23 622,79 um; resultado incorrecto debido a que el interés simple es una operación mono-capitalizada, y al descontar cada una de las rentas desde su fecha de ocurrencia hacia el momento 0, se procede de forma similar al interés compuesto, que es una operación multicapitalizada. En el presente caso la única fecha focal es el momento 4, y la equivalencia financiera a interés simple se da en el momento 0; es decir existe reversibilidad entre los importes 26 500 um y 23 660,71 um con una tasa trimestral de interés simple de 0,03 y 4 períodos de renta.

7.22 Ra uniforme de una anualidad trunca en función de P

Si se conocen el valor presente, la tasa de interés simple y el número de rentas uniformes de una anualidad simple anticipada trunca, puede calcularse el importe de su renta uniforme anticipada, al despejarla de la fórmula (7.21).

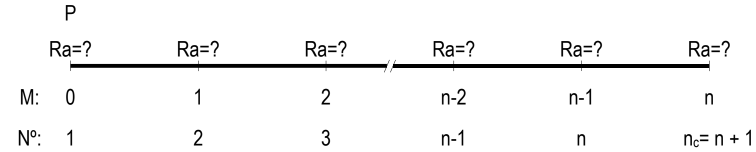


Figura 7.12 Diagrama de tiempo-valor que identifica las variables conocidas: P, j y n para obtener el importe de la renta uniforme anticipada trunca con interés simple.

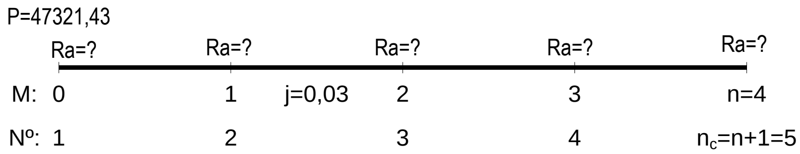
$P = R_a \left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2(1+jn)}\right]$ Fórmula (7.21)

$$\boxed{R_a = P\left[\frac{2(1+jn)}{(n+1)(2+jn)}\right]} \quad (7.22)$$

La fórmula (7.22) calcula el importe de la renta uniforme anticipada de una anualidad trunca bajo el régimen de interés simple, en función de su valor presente.

Ejemplo 7.22
Calcule el importe de la cuota uniforme trimestral anticipada que cancela un préstamo de 47 321,43 um en el plazo de un año. Esta anualidad trunca devenga una TNA de 0,12.

Solución
Con los datos P=47 321,43; j =TNT=0,03; n=4; y la fórmula (7.22) se calcula Ra de esta anualidad anticipada trunca.



$R_a = P\left[\frac{2(1+jn)}{(n+1)(2+jn)}\right]$ $\qquad R_a = 47\ 321{,}43\left[\frac{2(1+0{,}03\times4)}{(4+1)(2+0{,}03\times4)}\right]$

$$R_a = 47\ 321{,}43 \times 0{,}211320755 = 10\ 000$$

La tabla de amortización del préstamo se presenta a continuación.

M	Nº	Ra	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
0	1	10000	10000,00	0,00	37321,43		37321,43	
1	2	10000	10000,00	0,00	27321,43	1119,64	28441,07	1119,64
2	3	10000	10000,00	0,00	17321,43	1939,29	19260,71	819,64
3	4	10000	10000,00	0,00	7321,43	2458,93	9780,36	519,64
4	5	10000	7321,43	2678,57	0,00	0,00	0,00	219,64
		50000	47321,43	2678,57				2678,57

7.23 j en una anualidad anticipada trunca en función de P

A partir de la fórmula (7.21) se tiene:

$$P = R_a\left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2(1+jn)}\right] \qquad \text{Fórmula (7.21)}$$

$$2P(1+jn) = R_a(n+1)(2+jn)$$

$$2P + 2Pjn = 2R_a(n+1) + jnR_a(n+1)$$

$$2Pjn - jnR_a(n+1) = 2R_a(n+1) - 2P$$

$$j[2Pn - nR_a(n+1)] = 2[R_a(n+1) - P]$$

$$j = \frac{2[R_a(n+1) - P]}{2Pn - nR_a(n+1)}$$

$$\boxed{j = \frac{2[R_a(n+1) - P]}{2Pn - R_a n(n+1)}} \qquad (7.23)$$

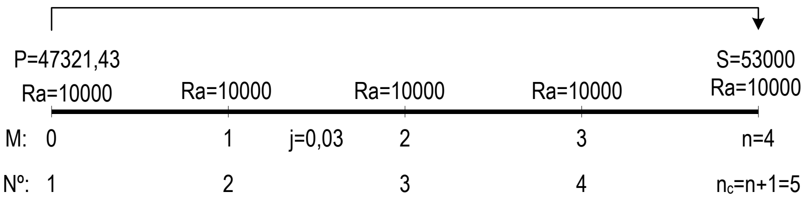
La fórmula (7.23) calcula la tasa de interés nominal de una anualidad anticipada trunca bajo el régimen de interés simple, en función de P.

Ejemplo 7.23
Calcule la tasa nominal anual que se aplicó a un préstamo de 47 321,43 um que debe amortizarse con cinco cuotas anticipadas trimestrales de 10 000 um en el plazo de un año; estas cuotas forman una anualidad anticipada trunca. Compruebe que la tasa de interés simple obtenida acumula el monto equivalente al valor futuro del préstamo, al final del cuarto trimestre.

Solución
Con los datos Ra=10 000; n=4; P=47 321,43; y la fórmula (7.23) se calcula j =TNT de esta anualidad anticipada trunca.

$$j = \frac{2[R_a(n+1) - P]}{2Pn - R_a n(n+1)} \qquad j = \frac{2[10\,000(4+1) - 47\,321{,}43]}{2\times 47\,321{,}43\times 4 - 10\,000\times 4(4+1)} = \frac{5\,357{,}14}{178\,571{,}44} = 0{,}03$$

La TNA es 0,12 (0,03×4).



El monto generado por el préstamo al final del cuarto trimestre es 53 000 um.

$$S = P[1 + jn] \qquad S = 47\,321{,}43[1 + 0{,}03 \times 4] = 53\,000$$

Del mismo modo, puede comprobarse que el monto simple acumulado por las rentas de esta anualidad trunca, asciende a 53 000 um.

M	Nº	R	NºR	Interés	Monto
0	1	10000	10000		10000
1	2	10000	20000	300	20300
2	3	10000	30000	600	30900
3	4	10000	40000	900	41800
4	5	10000	50000	1200	53000
	Σ	50000		3000	

7.24 n en una anualidad anticipada trunca en función de P

A partir de la fórmula (7.21) se tiene:

$$P=R_a\left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2(1+jn)}\right] \quad \text{Fórmula (7.21)}$$

$$2P(1+jn)=R_a(n+1)(2+jn)$$

$$2P+2Pjn=R_a(2n+jn^2+2+jn)$$

$$2P+2Pjn=2R_an+R_ajn^2+2R_a+R_ajn$$

$$2P+2Pjn-2R_an-R_ajn^2-2R_a-R_ajn=0$$

$$2R_an+R_ajn^2+2R_a+R_ajn-2P-2Pjn=0$$

$$R_ajn^2+2R_an+2R_a+R_ajn-2Pjn-2P=0$$

$$R_ajn^2+n[2R_a+R_aj-2Pj]+2R_a-2P=0$$

$$R_ajn^2+n[2R_a+R_aj-2Pj]+2(R_a-P)=0$$

$$n=\frac{-[2R_a+R_aj-2Pj]\pm\sqrt{[2R_a+R_aj-2Pj]^2-4(R_aj)[2(R_a-P)]}}{2R_aj}$$

$$\boxed{n_{1;2}=\frac{-[R_a(2+j)-2Pj]\pm\sqrt{[R_a(2+j)-2Pj]^2-4(R_aj)[2(R_a-P)]}}{2R_aj}} \quad (7.24)$$

$$n=\begin{cases} n=n_1 & si\ n_1\ es\ entero\ positivo; \\ n=n_2 & si\ n_2\ es\ entero\ positivo. \end{cases}$$

En el caso de que a partir de valores hipotéticos de P, Ra y j, n no resultara un valor entero positivo, entonces no existiría ninguna anualidad anticipada trunca simple cuyos valores de P, Ra y j sean iguales a los respectivos valores hipotéticos.

Ejemplo 7.24

Cuántas cuotas uniformes trimestrales anticipadas de 20 000 um cada una pueden cancelar un préstamo de 94 642,86 um. El préstamo devenga una TNA de 0,12; debe cancelarse en el plazo de un año y sus cuotas forman una anualidad anticipada trunca.

Solución

Con los datos Ra=20 000; P=94 642,86; j =TNT= 0,03 y con la fórmula (7.24) se calcula n.

$$n=\frac{-[R_a(2+j)-2Pj]\pm\sqrt{[R_a(2+j)-2Pj]^2-4(R_aj)[2(R_a-P)]}}{2R_aj}$$

Sea $B=R_a(2+j)-2Pj$

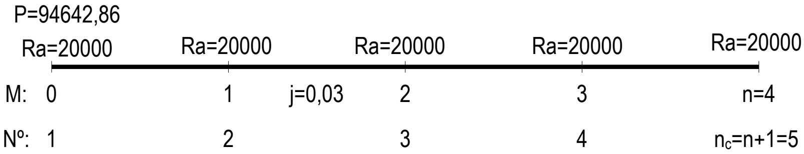
$$B=20\,000\times(2+0{,}03)-2\times 94\,642{,}86\times 0{,}03=34\,921{,}42857$$

$$n=\frac{-34\,921{,}43\pm\sqrt{34\,921{,}43^2-4(20\,000\times 0{,}03)\times[2\times(20\,000-94\,642{,}86)]}}{2\times 20\,000\times 0{,}03}$$

$$n=\frac{-34\,921{,}43\pm\sqrt{34\,921{,}43^2-4(600\times -149\,285{,}72)}}{1\,200}$$

$$n=\frac{-34\,921{,}43\pm\sqrt{34\,921{,}43^2+358\,285\,728}}{1\,200}=\frac{-34\,921{,}43+39721{,}43}{1200}$$

$$n = \frac{-34\,921{,}43 + 39721{,}43}{1200} = \frac{4800}{1200} = 4$$



Puede verificarse que 5 cuotas uniformes de 20 000 um cada una, cancelan un préstamo de 94 642,86 que devenga interés simple. Observe que en esta anualidad trunca el número de rentas o de cuotas n_c=n+1=5.

M	Nº	Ra	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
0	1	20000,0	20000,00	0,00	74642,86		74642,86	
1	2	20000,0	20000,00	0,00	54642,86	2239,29	56882,14	2239,29
2	3	20000,0	20000,00	0,00	34642,86	3878,57	38521,43	1639,29
3	4	20000,0	20000,00	0,00	14642,86	4917,86	19560,71	1039,29
4	5	20000,0	14642,86	5357,14	0,00	0,00	0,00	439,29
		100000,0	94642,86	5357,14				5357,14

7.25 Modelos de anualidades con interés simple con Excel

A continuación se presentan problemas de anualidades de gradientes resueltos en forma tradicional, y con modelos implementados en una hoja de Excel, en los cuales se utilizan las Funciones Financieras Personalizadas (FFP).

A. Anualidad simple vencida

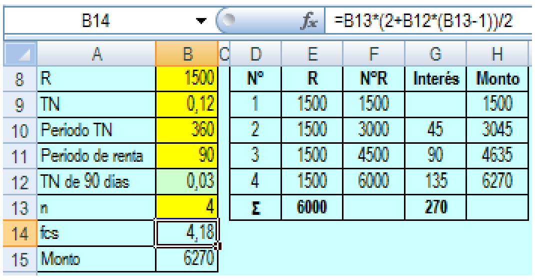
Valor futuro o monto de una anualidad con rentas vencidas

1. Calcule el monto acumulado en un cuatrimestre si se efectúan depósitos de ahorros de 1 500 um cada fin de mes. Estos depósitos devengan una tasa de interés simple de 0,12 anual. Compruebe su resultado con la formulación de una tabla de acumulación de dichos depósitos.

Solución

Con los datos R=1 500; j =TNT=0,03; n=4 y al aplicar la fórmula (7.1), se tiene:

$$S = R\left\{\frac{n[2+j(n-1)]}{2}\right\} \qquad S = 1\,500\left\{\frac{4[2+0{,}03(4-1)]}{2}\right\} = 1\,500 \times 4{,}18 = 6\,270$$



B14 =B13*(2+B12*(B13-1))/2

	A	B	D	E	F	G	H
8	R	1500	Nº	R	NºR	Interés	Monto
9	TN	0,12	1	1500	1500		1500
10	Periodo TN	360	2	1500	3000	45	3045
11	Periodo de renta	90	3	1500	4500	90	4635
12	TN de 90 días	0,03	4	1500	6000	135	6270
13	n	4	Σ	6000		270	
14	fcs	4,18					
15	Monto	6270					

Figura 7.13 Modelo 7.1 que obtiene el monto de una anualidad cuyas rentas devengan interés simple; y, su tabla de acumulación del monto.

Renta uniforme vencida en función de S

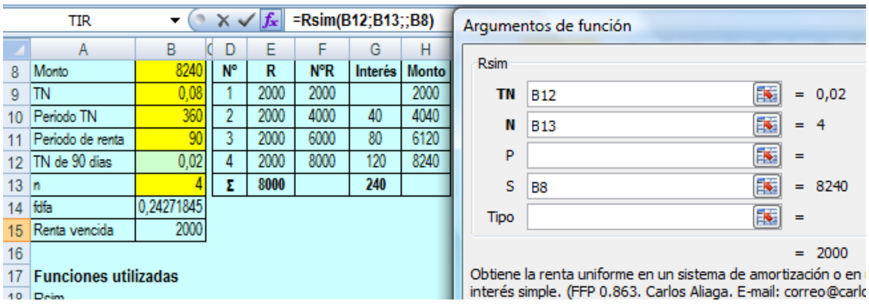
2. En el plazo de un año se requiere acumular un monto de 8 240 um con depósitos uniformes que se realizarán cada fin de trimestre, los mismos que se colocarán en una cuenta a interés simple cuya TNA es 0,08. ¿Cuánto es el importe de cada depósito?

Solución

Con los datos S=8 240; j=TNT=0,02; n=4 y al aplicar la fórmula (7.2), se tiene:

$$R = S\left\{\frac{2}{n[2+j(n-1)]}\right\} \qquad R = 8\,240\left\{\frac{2}{4[2+0{,}02(4-1)]}\right\} = 8\,240 \times \frac{16\,480}{8{,}24} = 2\,000$$

La figura 7.14 muestra el modelo 7.2 que obtiene la renta uniforme con la función Rsim y la tabla de acumulación del fondo.



TIR =Rsim(B12;B13;;B8)

	A	B	D	E	F	G	H
8	Monto	8240	Nº	R	NºR	Interés	Monto
9	TN	0,08	1	2000	2000		2000
10	Periodo TN	360	2	2000	4000	40	4040
11	Periodo de renta	90	3	2000	6000	80	6120
12	TN de 90 días	0,02	4	2000	8000	120	8240
13	n	4	Σ	8000		240	
14	fdfa	0,24271845					
15	Renta vencida	2000					
16							
17	Funciones utilizadas						

Figura 7.14 Modelo 7.2 que obtiene la renta uniforme vencida que acumula un monto con una tasa de interés simple.

Tasa de interés simple en una anualidad vencida en función de S

3. ¿Qué tasa de interés simple trimestral tiene que devengar un depósito de ahorro, si en el plazo de un año se efectuarán depósitos vencidos trimestrales de 1 000 um y se desea acumular un monto de 4 120 um?

Solución

Con los datos S=4 120; n=4; R=1 000 y al aplicar la fórmula (7.3), se calcula j=TNT.

$j = \frac{2(S-nR)}{nR(n-1)}$ $\qquad j = \frac{2(4\,120-4\times 1\,000)}{4\times 1\,000(4-1)} = \frac{240}{12\,000} = 0{,}02$

La figura 7.15 muestra el modelo 7.3 que obtiene la tasa de interés trimestral y la tabla de acumulación del fondo.

B12 f_x =2*(B8-B11*B9)/((B11*B9)*(B11-1))

	A	B	D	E	F	G	H	I
8	Monto	4120	Nº	R	NºR	Interés	Monto	$j = \frac{2(S-nR)}{nR(n-1)}$
9	Renta uniforme	1000	1	1000	1000		1000	
10	Periodo de renta	90	2	1000	2000	20	2020	
11	n	4	3	1000	3000	40	3060	
12	TN de 90 días	0,02	4	1000	4000	60	4120	
13			Σ	4000		120		

Figura 7.15 Modelo 7.3 que obtiene el valor de j en una anualidad con rentas vencidas que acumula un monto a interés simple.

n en una anualidad vencida en función de S

4. ¿Cuántas cuotas de 9 660 um cada una, serán necesarias depositar cada 30 días en un banco, para acumular un monto de 79 984,80 um? Esos depósitos devengan una TNA de 0,12.

Solución
Con los datos R=9 660; S=79 984,80; j =TNM=0,01 y al aplicar la fórmula (7.4), se calcula n.

$$n = \frac{R(j-2)\pm\sqrt{[R(2-j)]^2+8RjS}}{2Rj}$$

Sea $B = R(j-2) \;\rightarrow\; B = 9\,660(0{,}01-2) = -19\,223{,}4$

$$n = \frac{-19\,223{,}4\pm\sqrt{-19\,223{,}4^2+8\times 9\,660\times 0{,}01\times 79\,984{,}8}}{2\times 9\,660\times 0{,}01} = \frac{-19\,223{,}4+20769{,}00186}{193{,}2} = 8$$

B13 f_x =(B12+RAIZ(B12^2+8*B8*B11*B10))/(2*B8*B11)

	A	B	D	E	F	G	H
8	Renta uniforme	9660	Nº	R	NºR	Interés	Monto
9	Periodo de renta	30	1	9660	9660		9660,0
10	Monto	79984,80	2	9660	19320	96,6	19416,6
11	TN de 30 días	0,01	3	9660	28980	193,2	29269,8
12	B	-19223,4	4	9660	38640	289,8	39219,6
13	n de 30 días	8	5	9660	48300	386,4	49266,0
14			6	9660	57960	483,0	59409,0
15	**Funciones utilizadas**		7	9660	67620	579,6	69648,6
16	SUMA		8	9660	77280	676,2	79984,8
17	RAIZ		Σ	77280		2704,8	

Figura 7.16 Modelo 7.4 que obtiene el número de rentas que acumula un monto a interés simple.

Valor presente de una anualidad con rentas uniformes vencidas

5. Calcule el valor presente de una anualidad con rentas uniformes trimestrales vencidas de 27 634,66 um durante el período de un año. Utilice como tasa de evaluación una TNA de 0,18.

Solución
Con los datos R=27 634,66; j =TNT=0,045; n=4 y al aplicar la fórmula (7.5a), se calcula P.

$P = R\left\{\frac{n[2+j(n-1)]}{2(1+jn)}\right\}$ $\qquad P = 27\,634{,}66\left\{\frac{4[2+0{,}045(4-1)]}{2(1+0{,}045\times 4)}\right\}$

$$P = 27\,634{,}66 \times 3{,}6186441 = 100\,000$$

B14 | f_x =B13*(2+B12*(B13-1))/(2*(1+B12*B13))

	A	B	D	E	F	G	H	I	J	K
8	Renta uniforme	27634,66	N°	R	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
9	TN	0,18					100000,00		100000,00	
10	Periodo TN	360	1	27634,66	27634,66	0,00	72365,34	4500,00	76865,34	4500,00
11	Periodo de renta	90	2	27634,66	27634,66	0,00	44730,68	7756,44	52487,12	3256,44
12	TN de 90 días	0,045	3	27634,66	27634,66	0,00	17096,02	9769,32	26865,34	2012,88
13	n	4	4	27634,66	17096,02	10538,64	0,00	0,00	0,00	769,32
14	fas	3,6186441		**110538,64**	**100000,00**	**10538,64**				**10538,64**
15	Valor presente	100000								

Figura 7.17 Modelo 7.5 que obtiene el valor presente de una anualidad simple vencida que devenga un interés simple.

Renta uniforme vencida en función de P

6. Un préstamo de 18 464,91 um que devenga una TNA de 0,14, debe cancelarse con cuotas uniformes trimestrales vencidas en el plazo de un año. ¿Cuánto es el importe de la cuota?

Solución

Con los datos P=18 464,91; j =TNT=0,035; n=4 y al aplicar la fórmula (7.6a), se calcula R.

$$R = P\left\{\frac{2(1+jn)}{n[2+j(n-1)]}\right\} \qquad R = 18\,464{,}91\left\{\frac{2(1+0{,}035\times 4)}{4[2+0{,}035(4-1)]}\right\}$$

$$R = 18\,464{,}91 \times 0{,}270783848 = 5\,000$$

TIR | f_x =Rsim(B12;B13;B8)

	A	B	D	E	F	G	H	I	J	K
8	Principal	18464,91	N°	R	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
9	TN	0,14					18464,91		18464,91	
10	Periodo TN	360	1	5000	5000,00	0,00	13464,91	646,27	14111,18	646,27
11	Periodo de renta	90	2	5000	5000,00	0,00	8464,91	1117,54	9582,45	471,27
12	TN de 90 días	0,035	3	5000	5000,00	0,00	3464,91	1413,82	4878,73	296,27
13	n	4	4	5000	3464,91	1535,09	0,00	0,00	0,00	121,27
14	frc	0,270783848		**20000**	**18464,91**	**1535,09**				**1535,09**
15	Renta uniforme	5000								
16										
17	**Función utilizada**									
18	Rsim									

Argumentos de función

Rsim

TN B12 = 0,035

N B13 = 4

P B8 = 18464,91

S =

Tipo =

= 4999,999382

Obtiene la renta uniforme en un sistema de amortización o en un for

interés simple. (FFP 0.863. Carlos Aliaga. E-mail: correo@carlosaliag

Figura 7.18 Modelo 7.6 que obtiene el importe de la cuota uniforme vencida de un préstamo a interés simple.

j en una anualidad vencida en función de P

7. Un préstamo de 100 000 um se amortiza en el plazo de un año con cuotas trimestrales vencidas de 26 213,59 um. ¿Qué tasa de interés simple trimestral devenga este préstamo?

Solución

Con los datos n=4; R=26 213,59; P=100 000 y al aplicar la fórmula (7.7), se calcula j =TNT.

$$j = \frac{2(nR-P)}{n[2P-(n-1)R]} \qquad j = \frac{2(4\times 26\,213{,}59-100\,000)}{4[2\times 100\,000-(4-1)\times 26\,213{,}59]} = \frac{9\,708{,}72}{485\,436{,}92} = 0{,}02$$

B12 | f_x =2*(B11*B9-B8)/(B11*(2*B8-(B11-1)*B9))

	A	B	D	E	F	G	H	I	J	K
8	Valor presente	100000	N°	R	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
9	Renta uniforme	26213,59					100000,00		100000,00	
10	Periodo de renta	90	1	26213,59	26213,59	0,00	73786,41	2000,00	75786,41	2000,00
11	n	4	2	26213,59	26213,59	0,00	47572,82	3475,72	51048,54	1475,73
12	TN de 90 días	0,02	3	26213,59	26213,59	0,00	21359,23	4427,18	25786,41	951,45
13			4	26213,59	21359,23	4854,36	0,00	0,00	0,00	427,18
14	**Funciones utilizadas**			**104854,36**	**100000,00**	**4854,36**				**4854,36**

Figura 7.19 Modelo 7.7 que obtiene el la tasa de interés simple en una anualidad con rentas uniformes vencidas.

n en una anualidad vencida en función de P

8. ¿Cuántas rentas uniformes mensuales vencidas de 26 000 um cada una, serán necesarias para amortizar un préstamo de 100 000 um? El préstamo devenga interés simple con una TNM de 0,016393442622951.

Solución

Con los datos R=26 000; P=100 000; j=TNM=0,016393442622951 y al aplicar la fórmula (7.8), se obtiene el valor de n.

$$n = \frac{j(2P + R) - 2R \pm \sqrt{[j(2P + R) - 2R]^2 + 8PRj}}{2Rj}$$

Sea $B = j(2P + R) - 2R$

$$B = 0{,}016393442622951(2 \times 100\,000 + 26\,000) = -48\,295{,}08197$$

$$n = \frac{-48\,295{,}08197 \pm \sqrt{-48\,295{,}08197^2 + 8 \times 100\,000 \times 26\,000 \times 0{,}016393442622951}}{2 \times 26\,000 \times 0{,}016393442622951}$$

$$n = \frac{-48295{,}08197 + \sqrt{2673398548{,}78}}{852{,}4590164} = \frac{-48295{,}08197 + 51704{,}91803}{852{,}4590164} = \frac{3409{,}8360656}{852{,}4590164} = 4$$

B13 =(B12+RAIZ(B12^2+8*B10*B8*B11))/(2*B8*B11)

	A	B	D	E	F	G	H	I	J	K
8	Renta uniforme	26000	N°	R	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
9	Periodo de renta	30					100000		100000,00	
10	Principal	100000	1	26000	26000	0	74000	1639,34	75639,34	1639,34
11	TN de 30 días	0,016393442622951	2	26000	26000	0	48000	2852,46	50852,46	1213,11
12	B	-48295,08197	3	26000	26000	0	22000	3639,34	25639,34	786,89
13	n de 30 días	4	4	26000	22000	4000	0	0,00	0,00	360,66
14				104000	100000	4000				4000,00

Figura 7.20 Modelo 7.8 que obtiene el número de períodos uniformes en una anualidad de rentas uniformes vencidas con interés simple.

B. Anualidad simple anticipada

S en una anualidad anticipada

9. ¿Cuánto es el importe del capital que se acumulará en un período de 360 días, si se efectúan cuatro depósitos anticipados de 5 000 um, cada uno al inicio de un trimestre? Los depósitos devengan una tasa de interés simple anual de 0,12. Compruebe su resultado con la formulación de su respectiva tabla de acumulación de dichos depósitos.

Solución

Con los datos Ra=5 000; j =TNT=0,03; n=4 y al aplicar la fórmula (7.9a) se tiene:

$$S = R_a\left\{\frac{n[2 + j(n+1)]}{2}\right\} \qquad S = 5\,000\left\{\frac{4[2 + 0{,}03(4+1)]}{2}\right\}$$

$$S = 5\,000 \times 4{,}3 = 21\,500$$

B14 =B13*(2+B12*(B13+1))/2

	A	B	D	E	F	G	H	I
8	Ra	5000	M	N°	Ra	N°Ra	Interés	Monto
9	TN	0,12	0	1	5000	5000		5000
10	Periodo TN	360	1	2	5000	10000	150	10150
11	Periodo de renta	90	2	3	5000	15000	300	15450
12	TN de 90 días	0,03	3	4	5000	20000	450	20900
13	n	4	4	5			600	21500
14	fcs	4,30		Σ	20000	50000	1500	
15	Monto	21500						

Figura 7.21 Modelo 7.9 que obtiene el monto de una anualidad con rentas anticipadas de 5 000 um que devengan interés simple.

Ra uniforme de una anualidad en función de su valor futuro

10. Al final del plazo de 15 meses se requiere acumular un monto de 4 905 um con depósitos uniformes trimestrales anticipados que devengan una TNA de 0,12. ¿Cuánto es el importe de cada depósito?

Solución

Con los datos S=4 905; j =TNT=0,03; n=5 y al aplicar la fórmula (7.10a), se obtiene Ra.

$$R_a = S\left\{\frac{2}{n[2 + j(n+1)]}\right\} \qquad R_a = 4\,905\left\{\frac{2}{5[2 + 0{,}03(5+1)]}\right\}$$

$$R_a = 4\,905 \times 0{,}18348624 = 900$$

TIR =Rsim(B12;B13;;B8;B15)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
8	Monto	4905		M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto
9	TN	0,12		0	1	900	900		900
10	Periodo TN	360		1	2	900	1800	27	1827
11	Periodo de renta	90		2	3	900	2700	54	2781
12	TN de 90 días	0,03		3	4	900	3600	81	3762
13	n	5		4	5	900	4500	108	4770
14	fdfa	0,1835		5	6			135	4905
15	Tipo	1		Σ		4500		405	
16	Ra	900							
17									
18	Función utilizada								

Argumentos de función

Rsim

TN	B12	= 0,03
N	B13	= 5
P		=
S	B8	= 4905
Tipo	B15	= 1

= 900

Obtiene la renta uniforme en un sistema de amortización o en interés simple. (FFP 0.863. Carlos Aliaga. E-mail: correo@carlo

Figura 7.22 Modelo 7.10 que obtiene la renta uniforme anticipada que acumula un monto a interés simple.

j de una anualidad anticipada en función de S

11. ¿Qué tasa de interés simple trimestral tiene que devengar un depósito de ahorro, si en el plazo de un año se efectuarán depósitos anticipados trimestrales de 2 400 um y se desea acumular un monto de 10 080 um?

Solución

Con los datos S=10 080; n=4; Ra=2 400 y al aplicar la fórmula (7.11), se tiene:

$$j=\frac{2(S-R_a n)}{R_a n(n+1)} \qquad j=\frac{2(10\,080-2\,400\times 4)}{2\,400\times 4(4+1)}=\frac{960}{48\,000}=0{,}02$$

B12 =2*(B8-B9*B11)/((B9*B11)*(B11+1))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
8	Monto	10080		M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto	
9	Ra	2400		0	1	2400	2400		2400	
10	Periodo de renta	90		1	2	2400	4800	48	4848	
11	n	4		2	3	2400	7200	96	7344	
12	TN de 90 días	0,02		3	4	2400	9600	144	9888	
13				4	5			192	10080	
14	Función utilizada			Σ		9600		480		

Figura 7.23 Modelo 7.11 que obtiene la tasa de interés simple de una anualidad con rentas anticipadas que acumula un monto a interés simple.

n de una anualidad anticipada en función de S

12. ¿Cuántas cuotas trimestrales anticipadas de 8 000 um cada una, serán necesarias depositar en un banco, para acumular un monto de 34 400 um en el plazo de un año? Esos depósitos anticipados devengan una TNA de 0,12.

Solución

Con los datos Ra=8 000; S=34 400; j =TNT=0,03 y al aplicar la fórmula (7.12), se obtiene el valor de n.

$$n=\frac{-R_a(2+j)\pm\sqrt{[R_a(2+j)]^2+8R_a jS}}{2R_a j}$$

Sea $B=-Ra(2+j)$ $\qquad B=-8\,000(2+0{,}03)=-16\,240$

$$n=\frac{-16\,240\pm\sqrt{16\,240^2+8\times 8\,000\times 0{,}03\times 34\,400}}{2\times 8\,000\times 0{,}03}=\frac{-16\,240+18\,160}{480}=\frac{1\,920}{480}=4$$

B13 =(-B12+RAIZ(B12^2+(8*B8*B11*B10)))/(2*B8*B11)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
8	Ra	8000		M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto			
9	Periodo de renta	90		0	1	8000	8000		8000			
10	Monto	34400		1	2	8000	16000	240	16240			
11	TN de 90 días	0,03		2	3	8000	24000	480	24720			
12	B	16240		3	4	8000	32000	720	33440			
13	n de 90 días	4		4	5			960	34400			
14				Σ		32000		2400				

Figura 7.24 Modelo 7.12 que obtiene el número de rentas anticipadas que acumula un monto a interés simple.

Valor de P en una anualidad anticipada

13. Con una TNA de 0,08 calcule el valor presente de 4 rentas trimestrales anticipadas de 8 000 um cada una. Este valor presente debe ser equivalente a su respectivo valor futuro al final del momento 4.

Solución

Con los datos Ra=8 000; n=4; j =TNT=0,02 y la fórmula (7.13) se calcula P.

$$P = R_a\left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2(1+jn)}\right\} \qquad P = 8\,000\left\{\frac{4[2+0{,}02(4+1)]}{2(1+0{,}02\times 4)}\right\}$$

$$P = 8\,000 \times 3{,}888888889 = 31\,111{,}11$$

$$S = P(1+jn) \qquad S = 31\,111{,}11(1+0{,}02\times 4) = 33\,600$$

Si se acumulan a interés simple las rentas anticipadas se tiene un monto de 33 600 um, equivalente al monto del principal al final del cuarto trimestre.

B12 =B9*(2+B10*(B9+1))/(2*(1+B10*B9))

	A	B	D	E	F	G	H	I	J
8	Ra	8000	M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto	
9	n	4	0	1	8000	8000		8000	
10	j	0,02	1	2	8000	16000	160	16160	
11	Periodo de j	90	2	3	8000	24000	320	24480	
12	fas	3,888888889	3	4	8000	32000	480	32960	
13	P	31111,11	4				640	33600	
14	S	33600		Σ	32000		1600		

Figura 7.25 Modelo 7.13 que obtiene el valor presente de una anualidad anticipada.

Ra uniforme de una anualidad en función de P

14. Calcule el importe de la renta uniforme trimestral anticipada que podría cancelar un préstamo de 30 000 um con 4 pagos cada uno de los cuales se efectúa a inicios de cada trimestre; el préstamo devenga una TNA de 0,08. Verifique si el importe de la cuota cancela verdaderamente este préstamo que devenga interés simple.

Solución

Con los datos P=30 000; j =TNT=0,02; n=4; y la fórmula (7.14) se calcula Ra.

$$R_a = P\left\{\frac{2(1+jn)}{n[2+j(n+1)]}\right\} \qquad R_a = 30\,000\left\{\frac{2(1+0{,}02\times 4)}{4[2+0{,}02(4+1)]}\right\} = 30\,000 \times \frac{2{,}16}{8{,}4}$$

$$R_a = 30\,000 \times 0{,}257142857 = 7\,714{,}29$$

B12 =2*(1+B9*B11)/(B11*(2+B9*(B11+1)))

	A	B	D	E	F	G	H	I	J	K	L
8	P	30000	M	Nº	Ra	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
9	j	0,02	0	1	7714,29	7714,29	0,00	22285,71		22285,71	
10	Periodo de j	90	1	2	7714,29	7714,29	0,00	14571,43	445,71	15017,14	445,71
11	n	4	2	3	7714,29	7714,29	0,00	6857,14	737,14	7594,29	291,43
12	frc	0,257142857	3	4	7714,29	6840,00	874,29	17,14	0,00	17,14	137,14
13	Ra	7714,29	4								
14					30857,14	29982,86	874,29				874,29

Figura 7.26 Modelo 7.14 que calcula el valor de P en función de P.

Puede comprobarse que el importe de la cuota calculada no cancela el préstamo (sólo llega a devolverse 29 982,86 um y queda pendiente 17,14 um); lo que significa que esta fórmula no debe emplearse para amortizaciones de préstamo con interés simple.

j de una anualidad anticipada en función P

15. Qué TNA se aplicó para hallar el valor de P= 77 777,78 um equivalente al monto que se acumulará al final del cuarto trimestre con cuatro rentas trimestrales anticipadas de 20 000 um cada una. Verifique que el importe de P, es equivalente al monto acumulado de las cuatro rentas al final del cuarto trimestre.

Solución
Con los datos n=4; Ra=20 000; P=77 777,78; y la fórmula (7.15) se calcula j =TNA.

$$j=\frac{2(nR_a-P)}{n[2P-R_a(n+1)]} \qquad j=\frac{2(4\times 20\,000-77\,777{,}78)}{4[2\times 77\,777{,}78-20\,000(4+1)]}=\frac{4\,444{,}44}{222\,222{,}24}=0{,}02$$

La TNA anual es 0,08 (0,02×4). El valor futuro de 77 777,78 um al final del trimestre 4 llevado con la TNT=0,02 es 84 500 um.

$$S=P(1+jn) \qquad S=77\,777{,}78(1+0{,}02\times 4)=84\,000$$

Este valor futuro de 84 000 um es equivalente al monto de las 4 rentas anticipadas acumuladas a interés simple hasta el final del cuarto trimestre, como se comprueba con la siguiente tabla de acumulación del monto de la anualidad (celda I13)

B12 =2*(B10*B8-B9)/(B10*(2*B9-B8*(B10+1)))

	A	B	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q
8	Ra	20000	M	N°	Ra	N°Ra	Interés	Monto	Ra	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
9	P	77777,78	0	1	20000	20000		20000	20000	20000,00	0,00	57777,78		57777,78	
10	n	4	1	2	20000	40000	400	40400	20000	20000,00	0,00	37777,78	1155,56	38933,33	1155,56
11	Periodo n	90	2	3	20000	60000	800	61200	20000	20000,00	0,00	17777,78	1911,11	19688,89	755,56
12	TN de 90 días	0,02	3	4	20000	80000	1200	82400	20000	17733,33	2266,67	44,44	0,00	44,44	355,56
13	Valor futuro	84000	4				1600	84000							
14				Σ	**80000**		**4000**		**80000**	**77733,33**	**2266,67**				**2266,67**

Figura 7.27 Modelo 7.15 que obtiene el valor de j de una anualidad anticipada.

Puede comprobar en L14 que las cuotas anticipadas de 20 000 um no cancelan el préstamo al final del tercer trimestre (77 733,33 um), el saldo pendiente de 44,44 um se ubica en la celda N12.

n en una anualidad anticipada en función de P

16. ¿Con cuántas cuotas trimestrales anticipadas de 50 000 um que devengan una TNA de 0,08 se acumulará un monto de 210 000 um al final del año 1, equivalente a un valor de P de 194 444,44 um en el momento 0?

Solución
Con los datos P=194 444,44; Ra=50 000; j =TNT=0,02; y la fórmula (7.16) se calcula n.

$$n_{1;2}=\frac{2Pj-R_a(2+j)\pm\sqrt{[2Pj-R_a(2+j)]^2+8PR_aj}}{2jR_a}$$

Sea $B=2Pj-R_a(2+j)$

$$B=2\times 194\,444{,}44\times 0{,}02-50\,000(2+0{,}02)=-93\,222{,}22$$

$$n_{1;2}=\frac{-93\,222{,}22\pm\sqrt{93\,222{,}22^2+8\times 194\,444{,}44\times 50\,000\times 0{,}02}}{2\times 0{,}02\times 50\,000}$$

$$n_{1;2}=\frac{-93\,222{,}22\pm\sqrt{93\,222{,}22^2+155555552}}{2\,000}$$

$$n=\frac{-93\,222{,}22+101222{,}22}{2\,000}=\frac{8\,000}{2\,000}=4$$

En el siguiente cuadro de acumulación del monto o valor futuro de la anualidad anticipada, puede comprobarse que 4 cuotas anticipadas de 50 000 um cada una acumulan un monto de 210 000 um al final del cuarto trimestre.

B13 =(B12+RAIZ(B12^2+8*B10*B8*B11))/(2*B11*B8)

	A	B	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q
8	Ra	50000	M	N°	Ra	N°Ra	Interés	Monto	Ra	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
9	Periodo de renta	90	0	1	50000	50000		50000	50000	50000	0,00	144444,44		144444,44	
10	P	194444,44	1	2	50000	100000	1000	101000	50000	50000	0,00	94444,44	2888,89	97333,33	2888,89
11	TN de 90 días	0,02	2	3	50000	150000	2000	153000	50000	50000	0,00	44444,44	4777,78	49222,22	1888,89
12	B	-93222,22	3	4	50000	200000	3000	206000	50000	44333	5666,67	111,11	0,00	111,11	888,89
13	n de 90 días	4	4				4000	210000							
14	S	210000		Σ	**200000**		**10000**		**200000**	**194333**	**5666,67**				**5666,67**

Figura 7.28 Modelo 7.16 que obtiene el valor de n de una anualidad anticipada.

Puede verificarse que el valor de P= 194 444,44 um es equivalente a su respectivo valor futuro de 210 000 um al final del momento cuatro.

$S = P(1 + jn)$ $\qquad\qquad S = 194\,444{,}44(1 + 0{,}02 \times 4) = 252\,000$

Si se hubiese otorgado un préstamo de 194 444,44 um es imposible que se cancele en la última cuota, porque en interés simple los intereses solo se efectivizan al termino del horizonte temporal que corresponde al momento n; en cambio en la anualidad anticipada el último pago se hace en el momento n-1.

C. Anualidad trunca

S en una anualidad anticipada trunca

17. Calcule el valor futuro al final del cuarto trimestre, de una operación donde se depositan rentas de 8 000 um al inicio de cada trimestre. Los depósitos devengan una TNA de 0,08.

Solución

Con los datos Ra=8 000; n=4; j =TNT=0,02; y la fórmula (7.17a) se calcula S.

					S=?
	Ra=8000	Ra=8000	Ra=8000	Ra=8000	Ra=8000
M:	0	1 j=0,02	2	3	n=4
Nº:	1	2	3	4	n_c=n+1=5

Dado que el número de cuotas n_c es 5, entonces n=4 (es decir n_c-1).

$S = R_a\left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2}\right]$ $\qquad S = 8\,000\left[\frac{(4+1)(2+0{,}02\times4)}{2}\right] = 8\,000 \times 5{,}2 = 41\,600$

La siguiente tabla de acumulación comprueba el monto de 41 600 um en esta anualidad trunca.

B14 f_x =(B13+1)*(2+B12*B13)/2

	A	B
8	Ra	8000
9	TN	0,08
10	Periodo TN	360
11	Periodo de renta	90
12	TN de 90 días	0,02
13	n	4
14	fcs	5,20
15	Monto	41600

D	E	F	G	H	I
M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto
0	1	8000	8000		8000
1	2	8000	16000	160	16160
2	3	8000	24000	320	24480
3	4	8000	32000	480	32960
4	5	8000	40000	640	41600
	Σ	**40000**		**1600**	

Figura 7.29 Modelo 7.17 que obtiene el valor futuro de una anualidad anticipada trunca.

Ra uniforme de una anualidad anticipada trunca en función de S

18. Calcule el importe de la renta uniforme anticipada que acumula un monto simple de 31 200 um al final de un año, con 5 depósitos trimestrales anticipados. Estos depósitos devengan una TNA de 0,08.

Solución

Con los datos S=31 200; n=4; j = TNT=0,02; y la fórmula (7.18) se calcula Ra.

$R_a = S\left[\frac{2}{(n+1)(2+jn)}\right]$ $\qquad R_a = 31\,200\left[\frac{2}{(4+1)(2+0{,}02\times4)}\right] = 31\,200 \times \frac{2}{10{,}4}$

$$R_a = 5\,200 \times 0{,}192307692 = 6\,000$$

					S=31200
	Ra=6000	Ra=6000	Ra=6000	Ra=6000	Ra=6000
M:	0	1	2	3	n=4
Nº:	1	2	3	4	n_c=n+1=5

B14 f_x =2/((B13+1)*(2+B12*B13))

	A	B	D	E	F	G	H	I
8	Monto	31200	M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto
9	TN	0,08	0	1	6000	6000		6000
10	Periodo TN	360	1	2	6000	12000	120	12120
11	Periodo de renta	90	2	3	6000	18000	240	18360
12	TN de 90 días	0,02	3	4	6000	24000	360	24720
13	n	4	4	5	6000	30000	480	31200
14	fdfa	0,19230769		Σ	30000		1200	
15	Ra	6000						

Figura 7.30 Modelo 7.18 que obtiene el importe de la renta uniforme de una anualidad anticipada trunca.

j en una anualidad anticipada trunca en función de S

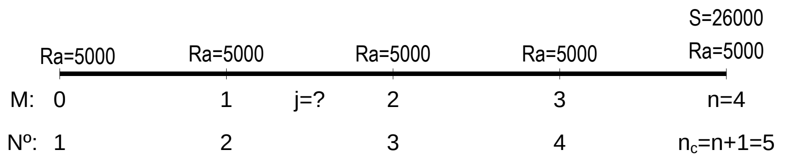
19. Calcule la TNA que se aplicó para acumular un monto de 26 000 um en el período de un año, con rentas uniformes trimestrales anticipadas de 5 000 um que devengan interés simple.

Solución

Con los datos S=26 000; Ra=5 000; n=4; y la fórmula (7.19) se calcula j =TNT.

$j = \frac{2[S-R_a(n+1)]}{R_a n(n+1)}$ $\qquad$ $j = \frac{2[26\,000-5\,000(4+1)]}{5\,000\times4(4+1)} = \frac{2\,000}{100\,000} = 0{,}02$

La TNA es 0,08; es decir 0,02 trimestral multiplicado por 4 trimestres.



Observe que en el período de un año se han realizado 5 depósitos anticipados de 5 000 um.

B12 f_x =2*(B8-B9*(B11+1))/(B9*B11*(B11+1))

	A	B	D	E	F	G	H	I	J
8	Monto	26000	M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto	
9	Ra	5000	0	1	5000	5000		5000	
10	Periodo de renta	90	1	2	5000	10000	100	10100	
11	n	4	2	3	5000	15000	200	15300	
12	TN de 90 días	0,02	3	4	5000	20000	300	20600	
13	Periodo 2	360	4	5	5000	25000	400	26000	
14	TN de 360 días	0,08		Σ	25000		1000		

Figura 7.31 Modelo 7.19 que obtiene el valor de j de una anualidad anticipada trunca.

n en una anualidad anticipada trunca en función de S

20. ¿Cuántas cuotas uniformes trimestrales uniformes anticipadas de 10 000 um deben colocarse en un banco para acumular un monto de 52 000 um? Los depósitos devengan una TNA de 0,08 y la anualidad es anticipada trunca.

Solución

Con los datos Ra=10 000; j =TNT=0,02; S=52 000; y la fórmula (7.20) se calcula n_c.

$$n_{1;2} = \frac{-R_a(2+j) \pm \sqrt{[R_a(2+j)]^2 + 8R_a j(S-R_a)}}{2R_a j}$$

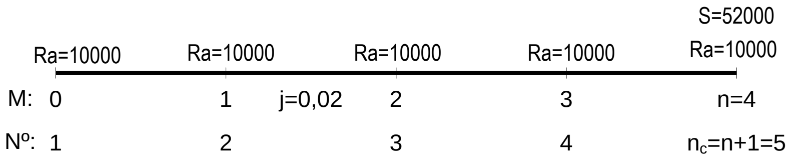
Sea $B = R_a(2+j)$ $\qquad$ $B = 10\,000(2+0{,}02) = 20\,200$

$$n_{1;2} = \frac{-20\,200 \pm \sqrt{20\,200^2 + 8\times10\,000\times0{,}02(52\,000-10\,000)}}{2\times10\,000\times0{,}02}$$

$$n_{1;2} = \frac{-20\,200 \pm \sqrt{408040000+67200000}}{400} = \frac{-20200+21800}{400} = \frac{1600}{400} = 4$$

$n_c = n+1$ $\qquad$ $n_c = 4+1 = 5$

Puede comprobarse que con 5 rentas anticipadas truncas n_c=n+1, se acumula un monto de 52 000 um con una TNA de 0,08.



B13 =(-B12+RAIZ(B12^2+(8*B8*B11*(B10-B8))))/(2*B8*B11)

	A	B	D	E	F	G	H	I
8	Ra	10000	M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto
9	Periodo de renta	90	0	1	10000	10000		10000
10	Monto	52000	1	2	10000	20000	200	20200
11	TN de 90 días	0,02	2	3	10000	30000	400	30600
12	B	20200	3	4	10000	40000	600	41200
13	n de 90 días	4	4	5	10000	50000	800	52000
14	n_c	5		Σ	**50000**		**2000**	

Figura 7.32 Modelo 7.20 que obtiene el valor de n de una anualidad anticipada trunca.

P de una anualidad anticipada trunca

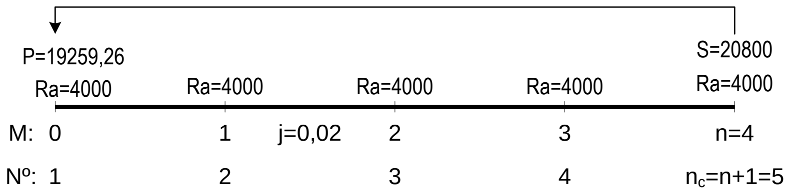
21. Calcule el valor de P de una anualidad anticipada trunca de 5 rentas uniformes trimestrales de 4 000 um cada una. Las rentas devengan interés simple con una TNA de 0,08. Si se descuentan cada una de las rentas hacia el momento 0, ¿a cuánto asciende este importe?

Solución

Con los datos Ra=4 000; n=4; j =TNT=0,02; y la fórmula (7.21) se calcula P de esta anualidad anticipada trunca.

$$P = R_a \left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2(1+jn)}\right] \qquad P = 4\ 000 \left[\frac{(4+1)(2+0{,}02\times 4)}{2(1+0{,}02\times 4)}\right] = 4\ 000 \times \frac{10{,}4}{2{,}16}$$

$$P = 4\ 000 \times 4{,}814814815 = 19\ 259{,}26$$



B12 =(B9+1)*(2+B10*B9)/(2*(1+B10*B9))

	A	B	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q	R
8	Ra	4000	M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto	Ra	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.	M=0
9	n	4	0	1	4000	4000		4000	4000	4000,00	0,00	15259,26		15259,26		4000,00
10	j	0,02	1	2	4000	8000	80	8080	4000	4000,00	0,00	11259,26	305,19	11564,44	305,19	3921,57
11	Periodo de j	90	2	3	4000	12000	160	12240	4000	4000,00	0,00	7259,26	530,37	7789,63	225,19	3846,15
12	fas	4,814814815	3	4	4000	16000	240	16480	4000	4000,00	0,00	3259,26	675,56	3934,81	145,19	3773,58
13	P	19259,26	4	5	4000	20000	320	20800	4000	3259,26	740,74	0,00	0,00	0,00	65,19	3703,70
14	S	20800		Σ	**20000**		**800**		**20000**	**19259,26**	**740,74**				**740,74**	**19245,01**

Figura 7.33 Modelo 7.21 que obtiene el valor de P de una anualidad anticipada trunca.

Observe que el valor de P en el momento 0, es el equivalente de capitalizar todas las rentas en el momento 4 y luego descontar este valor futuro hacia el momento 0.

$$P = \frac{S}{1+jn} \qquad P = \frac{20\ 800}{1+0{,}02\times 4} = 19\ 259{,}26$$

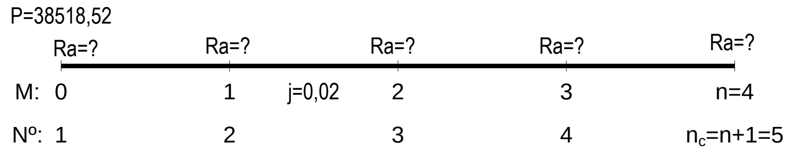
Es importante aclarar que si *incorrectamente* se descuentan cada una de las rentas hacia el momento 0 el valor presente de la anualidad será 19 245,01 um; resultado incorrecto debido a que el interés simple es una operación monocapitalizada, y al descontar cada una de las rentas desde su fecha de ocurrencia hacia el momento 0, se procede de forma similar al interés compuesto, que es una operación multicapitalizada.

Ra uniforme de una anualidad anticipada trunca en función de P

22. Calcule el importe de la cuota uniforme trimestral anticipada que cancela un préstamo de 38 518,52 um en el plazo de un año. Esta anualidad trunca devenga una TNA de 0,08.

Solución

Con los datos P=38 518,52; j =TNT=0,02; n=4; n_c=5 y la fórmula (7.22) se calcula Ra.



$$R_a = P\left[\frac{2(1+jn)}{(n+1)(2+jn)}\right] \qquad R_a = 38\,518{,}52\left[\frac{2(1+0{,}02\times4)}{(4+1)(2+0{,}02\times4)}\right]$$

$$R_a = 38\,518{,}52 \times 0{,}207692308 = 8\,000$$

B13 =2*(1+B9*B11)/((B11+1)*(2+B9*B11))

	A	B	D	E	F	G	H	I	J	K	L
8	P	38518,52	M	Nº	Ra	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
9	j	0,02	0	1	8000	8000,00	0,00	30518,52		30518,52	
10	Periodo de	90	1	2	8000	8000,00	0,00	22518,52	610,37	23128,89	610,37
11	n	4	2	3	8000	8000,00	0,00	14518,52	1060,74	15579,26	450,37
12	n_c	5	3	4	8000	8000,00	0,00	6518,52	1351,11	7869,63	290,37
13	frc	0,2076923	4	5	8000	6518,52	1481,48	0,00	0,00	0,00	130,37
14	Ra	8000			**40000**	**38518,52**	**1481,48**				**1481,48**

Figura 7.34 Modelo 7.22 que obtiene el valor de Ra de una anualidad anticipada trunca en función de P. Puede utilizar la función Rsim con Tipo=1 y N=5.

j en una anualidad anticipada trunca en función de P

23. Calcule la TNA que se aplicó a un préstamo de 41 896,55 um que debe amortizarse con cinco cuotas anticipadas trimestrales de 9 000 um en el plazo de un año; estas cuotas forman una anualidad anticipada trunca. Compruebe que la tasa de interés simple obtenida acumula el monto equivalente al valor futuro del préstamo, al final del cuarto trimestre.

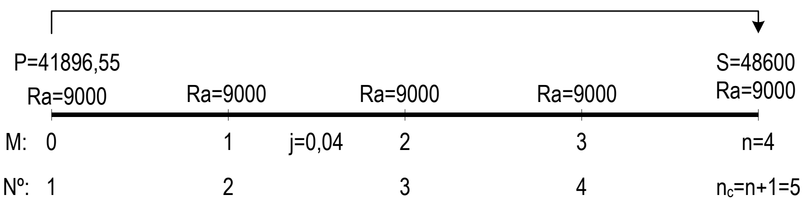
Solución

Con los datos Ra=9 000; n=4; n_c=5; P=41 896,55; y la fórmula (7.23) se calcula j =TNT de esta anualidad anticipada trunca.

$$j = \frac{2[R_a(n+1)-P]}{2Pn-R_a n(n+1)} \qquad j = \frac{2[9\,000(4+1)-41\,896{,}55]}{2\times41\,896{,}55\times4-9\,000\times4(4+1)} = \frac{6\,206{,}9}{15\,517{,}24} = 0{,}04$$

La TNA es 0,16 (0,04×4). El monto generado por el préstamo al final del cuarto trimestre es 48 600 um.

$$S = P[1+jn] \qquad S = 41\,896{,}55[1+0{,}04\times4] = 48\,600$$



B13 =2*(B8*(B10+1)-B9)/(2*B9*B10-B8*B10*(B10+1))

	A	B	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q
8	Ra	9000	M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto	Ra	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
9	P	41896,55	0	1	9000	9000		9000	9000	9000,00	0,00	32896,55		32896,55	
10	n	4	1	2	9000	18000	360	18360	9000	9000,00	0,00	23896,55	1315,86	25212,41	1315,86
11	n_c	5	2	3	9000	27000	720	28080	9000	9000,00	0,00	14896,55	2271,72	17168,28	955,86
12	Periodo n	90	3	4	9000	36000	1080	38160	9000	9000,00	0,00	5896,55	2867,59	8764,14	595,86
13	TN de 90 días	0,04	4	5	9000	45000	1440	48600	9000	5896,55	3103,45	0,00	0,00	0,00	235,86
14	Valor futuro	48600		Σ	**45000**		**3600**		**45000**	**41896,55**	**3103,45**				**3103,45**

Figura 7.35 Modelo 7.23 que obtiene el valor de j de una anualidad anticipada trunca en función de P.

n en una anualidad anticipada trunca en función de P

24. Cuántas cuotas uniformes trimestrales anticipadas de 6 000 um cada una pueden cancelar un préstamo de 28 392,86 um. El préstamo devenga una TNA de 0,12; debe cancelarse en el plazo de un año y sus cuotas forman una anualidad anticipada trunca.

Solución

Con los datos Ra=6 000; P=28 392,86; j =TNT=0,03 y con la fórmula (7.24) se calcula n.

$$n = \frac{-[R_a(2+j)-2Pj] \pm \sqrt{[R_a(2+j)-2Pj]^2 - 4(R_a j)[2(R_a - P)]}}{2R_a j}$$

Sea $B = R_a(2+j) - 2Pj$

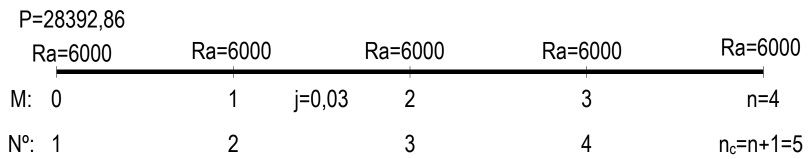
$$B = 6\,000 \times (2+0{,}03) - 2 \times 28\,392{,}86 \times 0{,}03 = 10\,476{,}4286$$

$$n = \frac{-10\,476{,}43 \pm \sqrt{10\,476{,}43^2 - 4(6\,000 \times 0{,}03) \times [2 \times (6\,000 - 28\,392{,}86)]}}{2 \times 6\,000 \times 0{,}03}$$

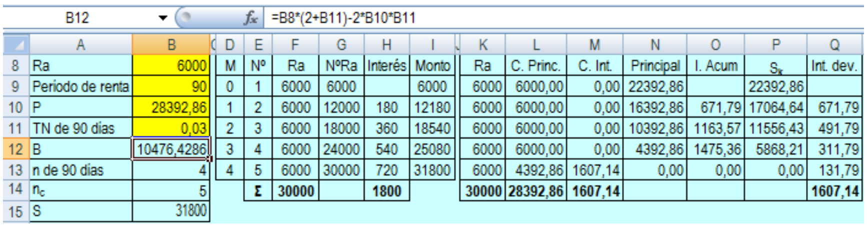
$$n = \frac{-10\,476{,}43 \pm \sqrt{10\,476{,}43^2 - 4(6\,000 \times 0{,}03 \times -44\,785{,}72)}}{360}$$

$$n = \frac{-10\,476{,}43 \pm \sqrt{10\,476{,}43^2 + 32\,245\,718{,}4}}{360} = \frac{-10\,476{,}43 + 11916{,}43}{360} = \frac{1\,440}{360} = 4$$

$$n_c = n + 1 \qquad n_c = 4 + 1 = 5$$



Puede verificarse que 5 cuotas uniformes de 6 000 um cada una, cancelan un préstamo de 28 392,86 um que devenga interés simple. Observe que en esta anualidad trunca el número de rentas o de cuotas n_c=n+1=5.



B12 =B8*(2+B11)-2*B10*B11

	A	B	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N	O	P	Q
8	Ra	6000	M	Nº	Ra	NºRa	Interés	Monto	Ra	C. Princ.	C. Int.	Principal	I. Acum	S_k	Int. dev.
9	Periodo de renta	90	0	1	6000	6000		6000	6000	6000,00	0,00	22392,86		22392,86	
10	P	28392,86	1	2	6000	12000	180	12180	6000	6000,00	0,00	16392,86	671,79	17064,64	671,79
11	TN de 90 días	0,03	2	3	6000	18000	360	18540	6000	6000,00	0,00	10392,86	1163,57	11556,43	491,79
12	B	10476,4286	3	4	6000	24000	540	25080	6000	6000,00	0,00	4392,86	1475,36	5868,21	311,79
13	n de 90 días	4	4	5	6000	30000	720	31800	6000	4392,86	1607,14	0,00	0,00	0,00	131,79
14	n_c	5		Σ	**30000**		**1800**		**30000**	**28392,86**	**1607,14**				**1607,14**
15	S	31800													

Figura 7.36 Modelo 7.24 que obtiene el valor de n de una anualidad anticipada trunca en función de P.

7.26 Listado de fórmulas

A. Anualidad simple vencida

Fórmula		Obtiene
Valor futuro y otras variables en función del valor futuro		
$S = R\left\{\frac{n[2+j(n-1)]}{2}\right\}$	(7.1)	Valor futuro o monto final de una anualidad vencida. El término entre llaves es el fcs.
$R = S\left\{\frac{2}{n[2+j(n-1)]}\right\}$	(7.2)	Renta uniforme de una anualidad vencida en función de S. El término entre llaves es el fdfa.
$j = \frac{2(S-Rn)}{Rn(n-1)}$	(7.3)	j de una anualidad vencida en función de S.
$n_{1;2} = \frac{R(j-2) \pm \sqrt{[R(2-j)]^2 + 8RjS}}{2Rj}$	(7.4)	n de una anualidad vencida en función de S, donde: $n = \begin{cases} n = n_1 & si\ n_1\ es\ entero\ positivo; \\ n = n_2 & si\ n_2\ es\ entero\ positivo. \end{cases}$
Valor presente y otras variables en función del valor presente		
$P = R\left\{\frac{n[2+j(n-1)]}{2(1+jn)}\right\}$	(7.5)	Valor de P de una anualidad con rentas uniformes vencidas. El término entre llaves es el fas.
$R = P\left\{\frac{2(1+jn)}{n[2+j(n-1)]}\right\}$	(7.6)	Renta uniforme vencida en función de P. El término entre llaves es el frc.
$j = \frac{2(nR-P)}{n[2P-(n-1)R]}$	(7.7)	j en una anualidad vencida función de P.
$n_{1;2} = \frac{j(2P+R) - 2R \pm \sqrt{[j(2P+R)-2R]^2 + 8PRj}}{2Rj}$	(7.8)	n en una anualidad vencida en función de P, donde: $n = \begin{cases} n = n_1 & si\ n_1\ es\ entero\ positivo; \\ n = n_2 & si\ n_2\ es\ entero\ positivo. \end{cases}$

B. Anualidad simple anticipada

Fórmula		Obtiene
Valor futuro y otras variables en función del valor futuro		
$S = R_a\left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2}\right\}$	(7.9)	Valor futuro o monto final de una anualidad anticipada. El término entre llaves es el fcs.
$R_a = S\left\{\frac{2}{n[2+j(n+1)]}\right\}$	(7.10)	Renta uniforme anticipada en función de S. El término entre llaves es el fdfa.
$j = \frac{2(S-R_a n)}{R_a n(n+1)}$	(7.11)	j de una anualidad anticipada en función de S.
$n_{1;2} = \frac{-R_a(2+j) \pm \sqrt{[R_a(2+j)]^2 + 8R_a jS}}{2R_a j}$	(7.12)	n de una anualidad anticipada en función de S, donde: $n = \begin{cases} n = n_1 & si\ n_1\ es\ entero\ positivo; \\ n = n_2 & si\ n_2\ es\ entero\ positivo. \end{cases}$
Valor de P y otras variables en función de P		
$P = R_a\left\{\frac{n[2+j(n+1)]}{2(1+jn)}\right\}$	(7.13)	Valor de P en una anualidad anticipada. El término entre llaves es el fas.

Fórmula	Obtiene
$R_a = P\left\{\frac{2(1+jn)}{n[2+j(n+1)]}\right\}$	(7.14) Renta uniforme anticipada en función de P. El término entre llaves es el frc.
$j = \frac{2(nR_a - P)}{n[2P - R_a(n+1)]}$	(7.15) j de una anualidad anticipada en función de P.
$n_{1;2} = \frac{2Pj - R_a(2+j) \pm \sqrt{[2Pj - R_a(2+j)]^2 + 8PR_aj}}{2jR_a}$	(7.16) n en una anualidad anticipada en función de P, donde: $n = \begin{cases} n = n_1 & si\ n_1\ es\ entero\ positivo; \\ n = n_2 & si\ n_2\ es\ entero\ positivo. \end{cases}$

C. Anualidad simple anticipada trunca

Fórmula	Obtiene
Valor futuro y otras variables	
$S = R_a\left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2}\right]$	(7.17) Valor futuro o monto final de una anualidad anticipada trunca. El término entre llaves es el fcs.
$R_a = S\left[\frac{2}{(n+1)(2+jn)}\right]$	(7.18) Ra de una anualidad anticipada trunca en función de S. El término entre llaves es el fdfa.
$j = \frac{2[S - R_a(n+1)]}{R_an(n+1)}$	(7.19) j en una anualidad anticipada trunca en función de S.
$n_{1;2} = \frac{-R_a(2+j) \pm \sqrt{[R_a(2+j)]^2 + 8R_aj(S - R_a)}}{2R_aj}$	(7.20) n en una anualidad anticipada trunca en función de S, donde: $n = \begin{cases} n = n_1 & si\ n_1\ es\ entero\ positivo; \\ n = n_2 & si\ n_2\ es\ entero\ positivo. \end{cases}$
Valor presente y otras variables	
$P = R_a\left[\frac{(n+1)(2+jn)}{2(1+jn)}\right]$	(7.21) Valor de P de una anualidad anticipada trunca. El término entre llaves es el fas.
$R_a = P\left[\frac{2(1+jn)}{(n+1)(2+jn)}\right]$	(7.22) Ra de una anualidad anticipada trunca en función de P. El término entre llaves es el frc.
$j = \frac{2[R_a(n+1) - P]}{2Pn - R_an(n+1)}$	(7.23) j en una anualidad anticipada trunca en función de P.
$n_{1;2} = \frac{-[R_a(2+j) - 2Pj] \pm \sqrt{[R_a(2+j) - 2Pj]^2 - 4(R_aj)[2(R_a - P)]}}{2R_aj}$	(7.24) n en una anualidad anticipada trunca en función de P, donde: $n = \begin{cases} n = n_1 & si\ n_1\ es\ entero\ positivo; \\ n = n_2 & si\ n_2\ es\ entero\ positivo. \end{cases}$

Preguntas de autoevaluación

1. ¿Cuál es la diferencia entre una operación multicapitalizada y una operación monocapitalizada? Ponga ejemplos de ambas operaciones.

2. ¿Qué es el anatocismo? Haga un breve resumen del anatocismo en el Perú y su relación con el Código Civil, artículos 1249 y 1250.

3. Si una operación financiera devenga una tasa de interés anual de 0,36 y usted puede tomar en préstamo un importe de 200 000 um para cancelarlo en un solo pago el día 185, ¿qué opción le convendría, si tiene la oportunidad de decidir entre el interés simple y el interés compuesto? Sustente su respuesta, de preferencia utilice un gráfico que justifique su respuesta.

4. ¿Qué es una anualidad simple? ¿Qué es una anualidad simple con interés simple? Ponga ejemplos de ambos conceptos.

5. ¿Cómo puede clasificar a las anualidades que devengan interés simple?

6. ¿Cuáles son las diferencias que existen entra las anualidades con interés simple: vencidas, anticipadas y truncas?

7. ¿Qué es una anualidad anticipada trunca? Ponga ejemplos de anualidades truncas que devengan interés simple.

8. Demuestre la fórmula del monto de una anualidad simple vencida que devenga una tasa de interés simple.

9. Demuestre la fórmula del monto de una anualidad simple anticipada que devenga una tasa de interés simple.

10. Demuestre la fórmula del monto de una anualidad anticipada trunca.

Problemas propuestos

A. Anualidad simple vencida

Valor futuro o monto de una anualidad con rentas vencidas

1. ¿Qué monto se acumulará en el plazo de un año con depósitos mensuales vencidos de 500 um, si éstos se colocan a interés simple con una TNA de 0,24? ¿Cuánto interés simple se acumuló en ese período? Formule el cuadro de acumulación del monto.

2. ¿Qué monto se acumulará en el plazo de 10 meses con depósitos mensuales vencidos de 1 000 um, si éstos se colocan a interés simple con una TNA de 0,12? ¿Cuánto es el importe del interés simple? Formule el cuadro de acumulación del monto.

3. Si durante el plazo de año y medio se realizan depósitos uniformes de 800 um cada 30 días, en un banco que remunera esos depósitos con una TNT de 0,03. ¿Cuánto se acumulará al final de ese período? ¿Cuánto es el importe del interés simple acumulado? ¿Cuánto es el importe del interés simple que se devengó durante el décimo período?

Renta uniforme de una anualidad vencida en función de S

4. Calcule el importe de la cuota uniforme mensual vencida con la cual se podrá acumular a interés simple un monto de 9 996 um en el plazo de un año, estas cuotas se depositarán en un banco que las remunera con una TNA de 0,09. ¿Cuánto es el importe del interés simple acumulado en el monto?

5. Calcule el importe de la cuota uniforme mensual vencida con la cual se acumulará a interés simple un monto de 9 573,75 um en el plazo de un año y medio, estas cuotas se depositarán en un banco que los remunera con una TNT de 0,0225. ¿Cuánto es el importe del interés simple acumulado en el monto?

j de de una anualidad vencida en función de S

6. ¿Qué TNA debe aplicarse para acumular un monto de 11 394 um en el plazo de un año con depósitos uniformes mensuales vencidos de 900 um, los cuales se colocarán a interés simple? ¿Cuánto es el importe del interés simple acumulado en el monto?

7. En un plazo de tres años se realizaron depósitos trimestrales vencidos de 1 000 um que al devengar una tasa de interés simple permitieron acumular un monto de 12 990 um. ¿Qué TNA se aplicó en esta operación? ¿Cuánto es el interés simple acumulado en el monto?

8. ¿A qué TNA deben colocarse 18 cuotas de 1 500 um cada una de las cuales vencen cada 30 días, para obtener un monto de 30 213 um? ¿Cuánto es el interés simple acumulado en el monto?

n en una anualidad vencida en función de S

9. ¿Con cuántos depósitos uniformes mensuales vencidos de 500 um se acumulará un monto simple de 5 225 um? Estos depósitos devenga una TNA de 0,12.

10. Para acumular un monto simple de 10 150 um, se realizan depósitos mensuales vencidos de 2 000 um que devengan una TNA de 0,09. ¿Con cuántos depósitos se logrará este objetivo? ¿Cuánto interés simple se acumuló en ese período?

11. Cuántas rentas quincenales vencidas de 1 000 um cada una, serán necesarias colocar en un banco para acumular un monto de 41 515 um; esta operación devenga una TNA de 0,12. ¿Cuánto es el importe del interés simple acumulado al final del horizonte temporal?

Valor de P de una anualidad con rentas uniformes vencidas

12. ¿Cuánto es el importe de un préstamo que se amortiza a interés simple en el plazo de un año con cuotas uniformes trimestrales vencidas de 8 000 um? Este préstamo devenga una TNA de 0,12. ¿Cuánto es el interés simple de esta operación?

13. Calcule el importe de un préstamo que se amortizará en el plazo de año y medio con cuotas uniformes trimestrales vencidas de 8 000 um. Este préstamo devenga una TNA de 0,12. ¿Cuánto es el interés simple de esta operación?

14. ¿Qué importe de préstamo puede amortizarse con 20 cuotas quincenales vencidas de 1 200 um cada una? El préstamo devenga una TNA de 0,12. ¿Cuánto interés simple generará este préstamo?

Renta uniforme vencida en función de P

15. Una cocina cuyo precio al contado es 750 um se financia con una cuota inicial de 75 um y el saldo que devenga una TNA de 0,24 debe pagarse en el plazo de medio año con cuotas mensuales uniformes vencidas a interés simple. Calcule el importe de la cuota uniforme y formule el cuadro de servicio de la deuda.

16. Calcule el importe de la renta uniforme vencida mensual que amortiza una deuda de 20 250 um, esta deuda devenga una TNA de 0,24 y debe cancelarse en el plazo de medio año. ¿Cuánto es el interés simple de esta operación?

j en una anualidad vencida en función de P

17. Una máquina que tiene un precio al contado de 8 000 um se vende al crédito con una cuota inicial de 1 200 um y el saldo se amortiza a interés simple en el plazo de 5 meses con cuotas uniformes mensuales vencidas de 1 400 um cada una.
    - ¿Qué TNA se cargó en esta operación?
    - ¿Cuánto es el interés de la operación?

18. Un préstamo de 19 726,41 um que devenga interés simple, se amortiza en el plazo de medio año con rentas uniformes mensuales vencidas de 3 400 um. Calcule la TNA cargada en esta operación.

n en una anualidad vencida en función de P

19. ¿Con cuántas cuotas uniformes trimestrales vencidas de 800 um se cancelará un préstamo de 4 900 um que devenga interés simple con una TNA de 0,16? ¿Cuánto es el interés simple acumulado durante el plazo del préstamo?

20. Un préstamo de 18 275,86 que devenga interés simple con una TNA de 0,16 debe cancelarse con cuotas uniformes trimestrales vencidas de 5 000 um. ¿Cuántas cuotas cancelará este préstamo? ¿Cuánto es el interés simple de esta operación?

21. ¿Cuántas rentas mensuales vencidas de 1 800 um pueden cancelar un préstamo de 16 900 um? El préstamo devenga interés simple con una TNA de 0,12. ¿Cuánto es el importe del interés simple generado por el préstamo?

B. Anualidad simple anticipada

Valor futuro o monto de una anualidad anticipada

22. ¿Qué monto simple se acumulará con 5 depósitos uniformes trimestrales anticipados de 1 000 um cada uno. Los depósitos devengan una TNA de 0,08.

23. Si al inicio de cada uno de ocho trimestres se realizan depósitos uniformes de 2 000 um que devengan una TNA de 0,08, ¿cuánto se habrá acumulado al final del segundo año? ¿Cuánto es el interés simple acumulado?

24. ¿Cuánto será el monto que se acumulará con 40 rentas uniformes anticipadas de 500 um cada una de las cuales se depositan en un banco al inicio de cada semana? Estas rentas devengan una TNA de 0,09. ¿Cuánto es el interés simple acumulado?

Ra uniforme de una anualidad en función de S

25. ¿Cuánto es el importe de la cuota uniforme trimestral anticipada que en el plazo de un año acumulará el monto simple de 8 400 um? Estos depósitos devengan una TNA de 0,08. Prepare el cuadro de acumulación del monto y verifique la validez de sus cálculos.

26. Si se desea acumular un monto simple de 27 240 um en el plazo de dos años, con depósitos uniformes trimestrales anticipados que devengan una TNA de 0,12, ¿cuánto debe ser el importe de cada depósito? ¿cuánto es el importe del interés simple acumulado?

27. ¿Cuánto es el importe de la cuota uniforme quincenal anticipada que en el plazo de dos años acumulará el monto simple de 53 880 um? Estos depósitos devengan una TNA de 0,12. ¿Cuánto es el importe del interés simple acumulado? Prepare el cuadro de acumulación del monto y verifique la validez de sus cálculos.

j de una anualidad anticipada en función de S

28. ¿Qué TNA se aplicó en una operación cuyo monto simple de 2 200 um se acumuló en el plazo de un año con depósitos anticipados trimestrales de 500 um? ¿Cuánto es el importe del interés simple?

29. ¿Qué TNA debe aplicarse para conseguir un monto de 4 360 um con depósitos trimestrales anticipados de 500 um en el plazo de dos años? ¿Cuánto será el importe del interés simple?

n de una anualidad anticipada en función de S

30. ¿Con cuántos depósitos anticipados bimestrales de 2 000 um podrá acumularse un monto simple de 10 600 um, si estos depósitos devengan una TNA de 0,12? ¿Cuánto es el interés simple acumulado?

31. Calcule el número de depósitos trimestrales anticipados de 3 000 um necesarios para acumular un monto simple de 26 160 um, si esos depósitos devengan una TNA de 0,08. ¿Cuánto es el interés simple de esta operación?

Valor de P en una anualidad anticipada

32. Calcule el valor de P de 6 rentas mensuales anticipadas de 5 000 um cada una, de modo tal que este valor de P sea equivalente a su respectivo valor futuro al final del día 180 que termina el horizonte temporal de la operación. Las rentas devengan una TNA de 0,12.

33. Durante el plazo de un año se realizaron depósitos de 4 000 um al inicio de cada 30 días con el objeto de retirar un determinado monto al final del día 360; estos depósitos devengan una TNA de 0,0936. Calcule el valor de P equivalente al monto de la operación y el importe del interés incluido en el monto simple.

34. Durante el plazo de 8 meses se realizaron depósitos de 10 000 um al inicio de cada 30 días con el objeto de retirar un determinado monto al final del día 240; estos depósitos devengan una TNA de 0,096. Calcule el valor de P equivalente al monto de la operación y el importe del interés incluido en el monto simple.

Ra uniforme de una anualidad en función de P

35. Con la fórmula (7.14) y los valores: P=50 000; TNA=0,12 y n=4 calcule el valor de Ra y determine si el valor de la renta uniforme mensual anticipada obtenida, puede cancelar el préstamo de 50 000 um. En caso que no pueda cancelarse el préstamo con la última cuota, explique el motivo y determine el importe del saldo que queda pendiente por cancelar.

36. Con la fórmula (7.14) y los valores: P=40 000; TNA=12 y n=6 calcule el valor de Ra y determine y si el valor de la renta uniforme anticipada obtenida, puede cancelar un préstamo de 40 000 um. En caso que no pueda cancelarse el préstamo con la última cuota, explique el motivo y determine el importe del saldo que queda pendiente por cancelar.

j de una anualidad anticipada en función de P

37. Se tiene un valor presente de 60 137,93 um equivalente de un monto acumulado con cuotas trimestrales anticipadas de 8 000 um durante el plazo de dos años. ¿Qué TNA se aplicó en esta anualidad anticipada y cuánto es el importe de los intereses incluido en el monto simple?

38. Se tiene un valor presente de 57 053,57 um equivalente de un monto acumulado con cuotas mensuales anticipadas de 5 000 um durante el plazo de un año. ¿Qué TNA se aplicó en esta anualidad anticipada y cuánto es el importe de los intereses incluido en el monto simple?

n en una anualidad anticipada en función de P

39. Con la fórmula (7.16) y los valores: P=61 925,93; Ra mensual=8 000; y TNA=0,12; calcule el valor de n, de modo tal que el valor futuro de P al final del horizonte temporal sea 66 880 um.

40. Con la fórmula (7.16) y los valores: P=11 716,98; Ra mensual=2 000; y TNA=0,12; calcule el valor de n, de modo tal que el valor futuro de P al final del horizonte temporal sea 12 420 um. Si P fuese un préstamo y Ra fuese la cuota anticipada que amortiza P, ¿P quedaría cancelado con la última Ra?; si no fuese así, ¿cuánto sería el saldo de P que quedaría sin cancelar?

C. Anualidad simple anticipada trunca

Valor futuro de una anualidad anticipada trunca

41. Calcule el monto simple acumulado en un banco durante un plazo de dos años, si en ese período se depositan al inicio de cada trimestre cuotas de 6 000 um; estos depósitos devengan una TNA de 0,08. Formule la tabla de acumulación del monto simple de esta anualidad trunca.

42. ¿Cuánto interés simple se acumuló con depósitos de 5 000 um que se realizan en un banco al inicio de cada mes durante un plazo de 10 meses? Los depósitos que forman una anualidad trunca y devengan una TNA de 0,084. Compruebe el importe del interés con un cuadro de acumulación del monto.
43. Calcule el monto simple acumulado en un año con depósitos anticipados mensuales de 4 000 um; estos depósitos realizados en un banco devengan una TNA de 0,096 y forman una anualidad trunca. ¿Cuánto es el interés simple acumulado al final del horizonte temporal? Compruebe el importe del interés con un cuadro de acumulación del monto.

Ra de una anualidad anticipada trunca en función de S

44. Si se requiere acumular en un banco un monto 81 744 um en el plazo de un año con cuotas anticipadas mensuales que devengan una TNA de 0,096; ¿cuánto será el importe de la renta uniforme para acumular ese monto de esta anualidad trunca? ¿Cuánto es el importe del interés simple acumulado al final del horizonte temporal? Compruebe el importe del interés con un cuadro de acumulación del monto.

45. Calcule el importe de la cuota uniforme anticipada mensual que colocada en un banco devenga una TNA de 0,108 y permite acumular un monto simple de 37 296 um en el plazo de ocho meses. ¿Cuánto es el importe del interés simple acumulado de estas rentas que forman una anualidad anticipada trunca?

46. ¿Cuánto es el importe de la renta uniforme mensual anticipada y del interés simple que se acumularán al final del plazo de medio año? El monto simple que se requiere acumular es 36 050 um y las rentas colocadas en un banco, que forman una anualidad anticipada trunca, devengan una TNA de 0,12.

j en una anualidad anticipada trunca en función de S

47. ¿Qué TNA debe aplicarse para que en un período de 8 meses se acumule un monto de 18 720 um con rentas mensuales anticipadas de 2 000 um? Estas rentas que se colocarán en un banco forman una anualidad anticipada trunca.

48. Se necesita acumular un monto de 21 945 um en el plazo de un año con cuotas bimestrales anticipadas de 3 000 um. ¿Qué TNA debe aplicarse en esta operación que forma una anualidad anticipada trunca?

49. ¿Qué TNS (semestral) debe aplicarse para acumular un monto de 38 880 um con rentas trimestrales anticipadas de 4 000 um en el plazo de dos años? Estas rentas forman una anualidad anticipada trunca.

n en una anualidad anticipada trunca en función de S

50. Con cuántas cuotas mensuales anticipadas de 8 000 um puede acumularse un monto de 110 240 um, estas cuotas devengan una TNA de 0,12 y forman una anualidad anticipada trunca.

51. Para acumular un monto de 58 320 um a interés simple con cuotas anticipadas trimestrales de 6 000 um que devengan una TNA de 0,08, ¿cuántos depósitos deben realizarse en un banco si estos forman una anualidad anticipada trunca?

52. Para una anualidad anticipada trunca, calcule los valores de n y n_c con los siguientes datos: Ra bimestral =2 000; TNA=0,12; S=24 200. Prepare una tabla de acumulación del monto y compruebe la validez de su respuesta.

Valor de P en una anualidad anticipada trunca

53. ¿Cuánto es el importe de un préstamo que se amortiza en el plazo de dos años con cuotas trimestrales anticipadas de 2 000 um? El préstamo devenga una TNA de 0,08 y forma una anualidad anticipada trunca.

54. Calcule el importe de un préstamo que devenga una TNA de 0,12 y se cancela en el plazo de un año con cuotas mensuales anticipadas de 2 000 um. Las cuotas forman una anualidad anticipada trunca.

55. ¿Cuánto es el importe de un préstamo que devenga una TNA de 0,08 y se cancela en el plazo de año y medio con cuotas trimestrales anticipadas de 3 000 um? Las cuotas forman una anualidad anticipada trunca.

Ra de una anualidad anticipada trunca en función de P

56. Un préstamo de 26 500 um que devenga una TNA de 0,08 debe cancelarse en el plazo de año y medio con cuotas anticipadas trimestrales que forman una anualidad trunca. ¿A cuánto asciende el importe de la cuota uniforme?

57. En el plazo de 10 meses debe cancelarse un préstamo de 26 250 um que devenga una TNA de 0,12 con cuotas mensuales anticipadas que forman una anualidad trunca. ¿A cuánto asciende el importe de la cuota uniforme? Formule la tabla de servicio de la deuda.

58. Calcule el importe de la cuota uniforme bimestral anticipada que en el plazo de un año cancela un préstamo de 23 817,5 um que devenga una TNA de 0,12. Las cuotas uniformes forman una anualidad anticipada trunca. Formule la tabla de servicio de la deuda.

j en una anualidad anticipada trunca en función de P

59. Un préstamo de 28 157,9 um que devenga interés simple, se canceló en el plazo de un año con cuotas anticipadas trimestrales de 6 000 um. Calcule la TNA que se aplicó en esta operación que forma una anualidad anticipada trunca, y formule la tabla de servicio de la deuda.

60. En el plazo de 10 meses se canceló un préstamo de 42 000 um que devenga interés simple, con cuotas anticipadas mensuales de 4 000 um que forman una anualidad anticipada trunca. Calcule la TNA que se aplicó en esta operación y formule la tabla de servicio de la deuda.

61. Calcule la TNA que se aplicó en un préstamo de 25 864,41 um que devenga interés simple, y se canceló con cuotas anticipadas trimestrales de 4 000 um en el plazo de año y medio, que forman una anualidad anticipada trunca.

n en una anualidad anticipada trunca en función de P

62. Calcule el valor de n y de n_c en una anualidad anticipada trunca con los siguientes valores: Ra trimestral anticipada=8 000; TNA=0,12; P=37 857,14. Compruebe estos valores con una tabla de servicio de la deuda.

63. ¿Con cuántas cuotas uniformes mensuales anticipadas de 2 000 um puede cancelarse un préstamo de 13 422,02 um que devenga una TNA de 0,18? Las cuotas uniformes forman una anualidad anticipada trunca. Compruebe estos valores con una tabla de servicio de la deuda.

64. Determine el número de cuotas uniformes mensuales anticipadas de 5 000 um que cancelan un préstamo de 60 909,09 um que devenga una TNA de 0,144. Las cuotas uniformes forman una anualidad anticipada trunca.

Resumen del capítulo

Una anualidad es simple cuando todas las rentas son del mismo importe, los períodos de renta son iguales, el período de la tasa de interés es igual que el período de renta y la tasa de interés no varía durante el horizonte temporal. Una anualidad simple con interés simple es aquella en la que se produce una sola capitalización, que se realiza al final del horizonte temporal, por lo tanto se aplica el método Primero Principal Luego Interés (PPLI).

En el presente capítulo se han estudiado las siguientes anualidades simples:

- Vencidas: su valor futuro con rentas vencidas se realiza en el momento n.
- Anticipada: su valor futuro con rentas anticipadas se realiza en el momento n.
- Trunca: su valor futuro con rentas anticipadas se realiza en el momento n, pero el número de rentas o de cuotas n_c es igual a $n+1$.

Para cada una de las anualidades anteriores se han derivado fórmulas para hallar los valores de S, P, R, Ra, j y n y se han estructurado modelos en Excel para resolver cada uno de los 24 casos tratados.

Capítulo 8

PERPETUIDADES

El objetivo general de este capítulo es estudiar las perpetuidades sean estas vencidas, anticipadas o diferidas y sus relaciones de equivalencia financiera entre rentas perpetuas y un stock de efectivo equivalente. En una perpetuidad no se pueden calcular valores futuros de rentas, dado que estos valores tienden hacia infinito; pero si es posible calcular sus respectivos valores presentes.

Objetivos del capítulo

Al terminar este capítulo el lector estará capacitado para:

8.1 Definir y clasificar una perpetuidad.

8.2 Calcular el valor presente de una perpetuidad simple con rentas perpetuas simples: vencidas; anticipadas; anticipada cuya renta inicial es distinta de las demás; diferidas vencidas; diferidas anticipadas; perpetuidades cuyas rentas se producen cada cierto período de tasa.

8.3 Calcular las rentas uniformes de una perpetuidad vencida y de una perpetuidad anticipada.

8.4 Calcular la tasa interna de retorno de una perpetuidad.

8.5 Calcular el costo capitalizado de un activo fijo y el costo capitalizado cuando el costo original del activo es igual a su respectivo costo de reemplazo.

8.1 Perpetuidad

Una perpetuidad es una anualidad en la que el fin del horizonte temporal no está determinado y el número de rentas n tiende hacia infinito. Algunos ejemplos de rentas perpetuas son:

- Las rentas que generan los peajes de autopistas.
- Los importes de efectivo que se acumulan para cubrir los costos por mantenimiento preventivo de carreteras, acueductos, reservorios, puentes, etc.
- Los dividendos que pagan las sociedades anónimas a sus accionistas, si se asume que la empresa no quebrará, y tienen una vida indefinida.

Las rentas perpetuas, al igual que las temporales pueden ser vencidas, anticipadas y diferidas. A continuación se presentan esquemas de los diagramas de flujo de caja de las rentas perpetuas ciertas: vencidas, anticipadas y diferidas; estos diagramas presentan en el horizonte temporal su extremo derecho abierto, que indica su fin no determinado.

Figura 8.1 Perpetuidad simple vencida.

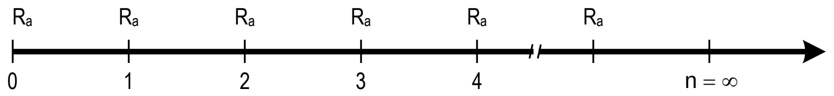


Figura 8.2 Perpetuidad simple anticipada.

Figura 8.3 Perpetuidad simple vencida diferida (2 períodos de renta).

Figura 8.4 Perpetuidad simple anticipada diferida (2 períodos de renta).

Las perpetuidades se utilizan, entre otras aplicaciones, para evaluar proyectos de inversión cuya vidas económica tiende a infinito, evaluar dividendos de empresas que se crean para perdurar en el mercado, formular modelos financieros en los que se supone que existirán flujos de caja en el largo plazo.

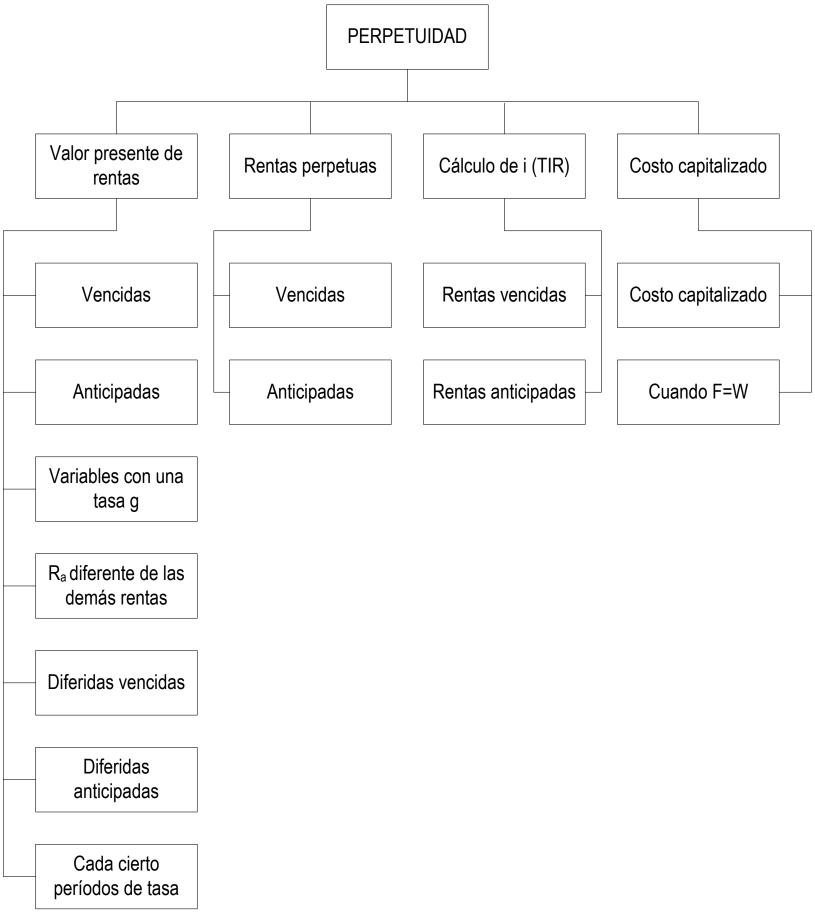


Figura 8.5 Principales casos que pueden presentarse en los cálculos de las variables de una perpetuidad.

8.2 Monto de una perpetuidad

Suponga que se tiene una anualidad simple vencida de 10 rentas anuales que devenga una TEA de 0,1; ¿cuánto serán los valores futuros de la anualidad si el número de rentas anuales se incrementan a 40, 50, 60 y así sucesivamente hasta llegar a 90 años?

n	10	40	50	60	70	80	90
FCS	15,9374	442,5926	1163,9085	3034,8164	7887,4696	20474,0021	53120,2261
Monto	15937,42	442592,56	1163908,53	3034816,40	7887469,57	20474002,15	53120226,12

En la tabla anterior se observa que cuando n crece indefinidamente, también crece indefinidamente el FCS (factor de capitalización de la serie uniforme) y el monto de la anualidad; en consecuencia el FCS que lleva al futuro una serie de rentas uniformes cuyo número tiende a +∞ (más infinito) es:

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{FCS} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = +\infty$$

Por esta razón, el monto de la serie de rentas de una perpetuidad también tenderá hacia infinito, por lo tanto no se calcula el monto de una anualidad cuyas rentas tienden hacia infinito.

8.3 Valor presente de una perpetuidad simple vencida

Calcular el valor de presente de rentas perpetuas que forman una anualidad simple, significa descontar hacia el momento 0 las infinitas rentas uniformes que se ubican en el futuro utilizando con una tasa efectiva i.

A partir de la fórmula (2.2a) $P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$ que calcula el valor presente de una anualidad simple vencida, puede deducirse la fórmula del valor presente de una perpetuidad, cuando n crece indefinidamente, si se halla el límite del FAS.

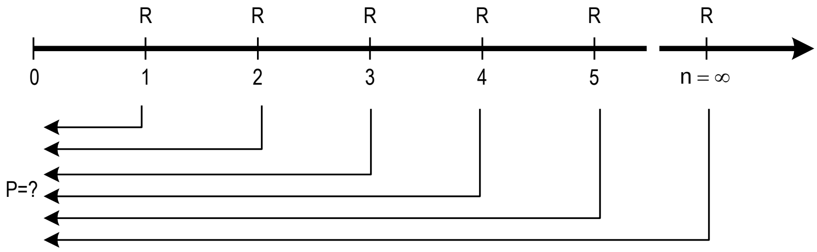


Figura 8.6 Valor presente de una anualidad cuyas rentes perpetuas son vencidas.

$$FAS_{i;n} = \frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} = \frac{(1+i)^n}{i(1+i)^n} - \frac{1}{i(1+i)^n} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i(1+i)^n}$$

Cuando n tiende a infinito:

$$FAS_{i;n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{i} - \frac{1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$FAS_{i;n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{i} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{i(1+i)^n}$$

$$FAS_{i;n} = \frac{1}{i} - \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{i}\left[\frac{1}{(1+i)^n}\right]\right\}$$

$$FAS_{i;n} = \frac{1}{i} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{i}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+i)^n}$$

$$FAS_{i;n} = \frac{1}{i} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{i}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+i)^n} \quad \text{(a)}$$

Pero si $i > 0$ se tiene:

$$1 + i > 1$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+i)^n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+i)^n} = 1 \qquad \text{(b)}$$

Al reemplazar (b) en (a)

$$FAS_{i;n} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i}(0)$$

$$FAS_{i;n} = \frac{1}{i} \qquad \text{(c)}$$

Al reemplazar (c) en la fórmula (2.2a):

$$\boxed{P = R\left[\frac{1}{i}\right]} \quad (8.1a)$$

La fórmula (8.1a) calcula el valor presente de una perpetuidad simple vencida cuando n tiende hacia infinito; y en la cual i debe ser del mismo período de R.

El factor de actualización de la serie uniforme de una perpetuidad vencida, FAS
En la fórmula (8.1a) el término entre corchetes, es el Factor de Actualización de la Serie uniforme (FAS) de una perpetuidad vencida, por lo tanto la fórmula (8.1a) se representa:

$$\boxed{P = R.FAS_{i;\infty}} \quad (8.1b)$$

La fórmula (8.1b) se lee: "el FAS de una perpetuidad a una tasa i por período durante infinitos períodos de renta, transforma una serie uniforme de rentas vencidas R en un valor presente P". El $FAS = \frac{1}{i}$ es el valor actual de una anualidad cuyas rentas perpetuas uniformes simples vencidas son de 1 um.

Algebraicamente puede demostrarse la fórmula del FAS cuando n tiende hacia infinito, del siguiente modo.

$$P=\frac{R}{(1+i)^1}+\frac{R}{(1+i)^2}+\frac{R}{(1+i)^3}+\frac{R}{(1+i)^4}+\cdots \quad (1)$$

$$P=\frac{R}{(1+i)^1}+\frac{R}{(1+i)^1}.\frac{1}{(1+i)^1}+\frac{R}{(1+i)^1}.\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{R}{(1+i)^1}.\frac{1}{(1+i)^3}+\cdots \quad (2)$$

$$P=a + ax + ax^2 + ax^3 \quad (3)$$

$$Px=ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 \quad (4)$$

$$P=a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots \quad (3)$$

$$-Px= \quad - ax - ax^2 - ax^3 - \cdots \quad (4)$$

$$P(1-x)=a \quad (5)$$

$$P=\frac{a}{1-x} \quad (6)$$

$$P=\frac{\frac{R}{1+i}}{\frac{1+i}{1+i}-\frac{1}{1+i}}=\frac{\frac{R}{1+i}}{\frac{i}{1+i}} \quad (7)$$

(1) Valor presente de una anualidad con rentas perpetuas vencidas

(2) Al descomponer cada término de (1) y sacar factor común $\frac{R}{1+i}$

(3) Al hacer $\frac{R}{1+i} = a$ y, $\frac{1}{1+i} = x$

(4) Al multiplicar (3) por x

(5) Al restar (4) de (3)

Al reagrupar y simplificar (7) se tiene:

$$\boxed{P = R\left[\frac{1}{i}\right]} \quad (8.1a)$$

Ejemplo 8.1
Con el objeto de apoyar los trabajos de investigación que realiza el Instituto Americano de Dirección de Empresas, la Fundación "GBM" decidió donar a perpetuidad un importe de 10 000 um al final de cada año lectivo. Calcule el valor presente de la donación con una TEA de 0,0625.

Solución
Con los datos R=10 000; i=0,0625 y con la fórmula (8.1a) se calcula P.

$P = R\left[\frac{1}{i}\right]$ $\qquad$ $P = 10\,000\left[\frac{1}{0{,}0625}\right] = 160\,000$

Ejemplo 8.2
Una persona que en la fecha recibió su liquidación por compensación de tiempo de servicios y un incentivo por retiro voluntario de la empresa en que trabajó, decidió abrir una cuenta en un banco que remunera los ahorros con una TEA de 0,0745. El objetivo de este ahorro es retirar a fin de cada mes un importe de 500 um durante un horizonte de tiempo infinito. Calcule el importe que debe colocar en la cuenta que le permita cumplir tal objetivo.

Solución
Con los datos R=500; TEM= 0,006005917 y con la (8.1a) se calcula P.

$TEM = 1{,}0745^{30/360} - 1 = 0{,}006005917$

$P = R\left[\frac{1}{i}\right]$ $\qquad$ $P = 500\left[\frac{1}{0{,}006005917}\right] = 500 \times 166{,}5024752 = 83\,251{,}24$

8.4 Valor presente de una perpetuidad simple anticipada

A partir de la fórmula (8.1a) puede calcularse el valor presente de una perpetuidad con rentas anticipadas, al reemplazar en esa fórmula, R por su equivalente R_a.

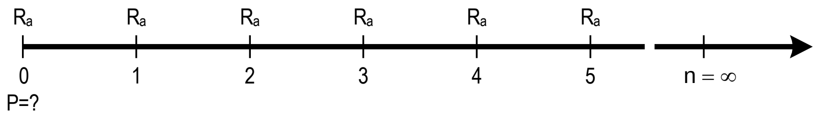


Figura 8.7 Anualidad con rentas perpetuas anticipadas.

De acuerdo con la fórmula (8.1a) se tiene $P = R\left[\frac{1}{i}\right]$, pero por equivalencia financiera se sabe que $R = R_a(1+i)$, entonces:

$$P = R_a\left[(1+i)\frac{1}{i}\right]$$

$$\boxed{P = R_a\left[\frac{(1+i)}{i}\right]} \quad (8.2a)$$

La fórmula (8.2a) calcula el valor presente de una perpetuidad simple anticipada cuando n tiende hacia infinito; y en la cual i debe ser del mismo período de R_a.

El factor de actualización de la serie uniforme de una perpetuidad anticipada, FAS
En la fórmula (8.2a) el término entre corchetes, es el Factor de Actualización de la Serie uniforme (FAS) de una perpetuidad anticipada, por lo tanto la fórmula (8.2a) se representa:

$$\boxed{P = R_a.FAS_{i;\infty}} \quad (8.2b)$$

La fórmula (8.2b) se lee: "el FAS de una perpetuidad a una tasa i por período durante infinitos períodos de renta, transforma una serie uniforme de rentas anticipadas R_a en un valor presente P".

El $FAS = \frac{(1+i)}{i}$ es el valor actual de una anualidad cuyas rentas perpetuas uniformes simples anticipadas son de 1 um.

Ejemplo 8.3
El gobierno peruano se comprometió que a partir de la fecha desembolsará anualmente y en forma indefinida un importe de 100 000 um para mantener operativa la carretera Lima-Barranca. Calcule el valor presente de esa perpetuidad con una TEA de 0,05.

Solución
Con los datos R_a=100 000; TEA=0,05; y con la fórmula (8.2a) se calcula P.

$P = R_a\left[\frac{(1+i)}{i}\right]$ $\qquad$ $P = 100\ 000\left[\frac{1+0,05}{0,05}\right] = 100\ 000 \times 21 = 2\ 100\ 000$

8.5 Valor presente de una perpetuidad cuyas rentas vencidas crecen con una tasa g (i > g)

Si se espera que una renta R_0 que se ubica en el momento cero del horizonte temporal, crezca a una tasa uniforme g en cada periodo uniforme de renta, durante los infinitos períodos de una perpetuidad, y si $i > g$ (si $g > i$ entonces P es infinito); luego en cualquier período futuro t se tiene:

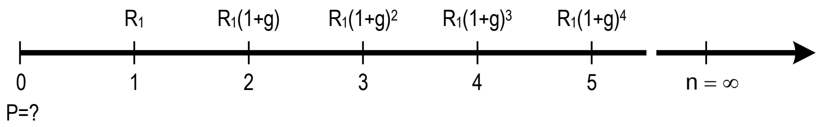


Figura 8.8 Anualidad con rentas perpetuas que crecen con una tasa g.

Para hallar el valor presente de la perpetuidad de la figura 8.7, se tiene:

$$P=\frac{R_1}{(1+i)^1}+\frac{R_1(1+g)^1}{(1+i)^2}+\frac{R_1(1+g)^2}{(1+i)^3}+\frac{R_1(1+g)^3}{(1+i)^4}+\cdots \qquad (1)$$

$$P=\frac{R_1}{(1+i)^1}+\frac{R_1}{(1+i)^1}\cdot\frac{(1+g)^1}{(1+i)^1}+\frac{R_1}{(1+i)^1}\cdot\frac{(1+g)^2}{(1+i)^2}+\frac{R_1}{(1+i)^1}\cdot\frac{(1+g)^3}{(1+i)^3}+\cdots \qquad (2)$$

$$P=a\ +ax\ +ax^2+\ ax^3+\ldots \qquad (3)$$

$$Px=ax+ax^2+ax^3+ax^4+\ldots \qquad (4)$$

: :

$$P=a\ +ax\ +ax^2+\ ax^3\ +\cdots \qquad (3)$$

$$-Px=\quad -ax\ -ax^2-\ ax^3\ -\cdots \qquad (4)$$

$$P(1-x)=a \qquad (5)$$

$$P=\frac{a}{1-x} \qquad (6)$$

$$P=\frac{\frac{R_1}{1+i}}{\frac{1+i}{1+i}-\frac{1+g}{1+i}}=\frac{\frac{R_1}{1+i}}{\frac{i-g}{1+i}} \qquad (7)$$

(1) Valor presente de una anualidad con rentas perpetuas que crecen con una tasa g

(2) Al descomponer cada término de (1) y sacar factor común $\frac{R_1}{1+i}$

(3) Al hacer $\frac{R_1}{1+i}=a$ y $\frac{1+g}{1+i}=x$

(4) Al multiplicar (3) por x

(5) Al restar (4) de (3)

Al reagrupar y simplificar (7) se tiene:

$$\boxed{P=\frac{R_1}{i-g}} \qquad (8.3)$$

La fórmula (8.3) calcula el valor presente de una perpetuidad simple vencida cuando n tiende hacia infinito y cuyas rentas crecen con una tasa g; en la cual i y g deben ser del mismo período de R_1.

Modelo de Gordon y Shapiro

Si en la fórmula (8.3) R_1 se remplaza por Div_1 (dividendo de una acción común que se recibirá en el próximo período), e i por k_e (tasa de dividendo de la acción común), se tiene:

$$\boxed{P = \frac{Div_1}{k_e - g}} \quad (8.4)$$

La fórmula (8.4) se conoce como el modelo de valuación para los dividendos con crecimiento constante o modelo de Gordon y Shapiro, dado que fue Myron Gordon quién la desarrolló. A partir de la fórmula (8.4) se obtienen las fórmulas (8.5), (8.6) y (8.7) de las variables que intervienen en el modelo de dividendos con crecimiento constante.

$$\boxed{k_e = \frac{Div_1}{P} + g} \quad (8.5) \qquad \boxed{g = k_e - \frac{Div_1}{P}} \quad (8.6) \qquad \boxed{Div_t = Div_0(1+g)^t} \quad (8.7)$$

Ejemplo 8.4
Calcule el valor presente de una acción común, si el inversionista requiere una tasa de rendimiento efectivo de 0,12 anual. Los analistas de valores estiman que el dividendo del próximo año de esa acción común sea 2 um, y crezca en el futuro a perpetuidad, a una tasa anual de 0,03.

Solución
Con los datos Div_1=2; k_e=0,12; g=0,03 y con la fórmula (8.4) se calcula P.

$$P = \frac{Div_1}{k_e - g} \qquad P = \frac{2}{0{,}12 - 0{,}03} = 22{,}22$$

Ejemplo 8.5
En el período quinquenal pasado los dividendos anuales de las acciones de la compañía El Sol, crecieron desde 1,20 um (momento 0), hasta 1,46 um (momento 5).

a. Determine la tasa compuesta de crecimiento anual del dividendo en ese período quinquenal.
b. Si se asume que la tendencia de crecimiento de los dividendos se mantiene, calcule los dividendos para cada uno de los próximos tres años.
c. Si se asume que la tendencia de crecimiento de los dividendos se mantiene para un futuro previsible y que se requiere una tasa de rendimiento de 0,12 ¿cuánto sería el precio actual de la acción?

Solución
Con los datos g=0,04; P=1,2; S=1,46; k_e=0,12 se calculan las respuestas solicitadas.

a. Tasa compuesta de crecimiento anual del dividendo en el período quinquenal.

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{1/n} - 1 \qquad i = \left(\frac{1{,}46}{1{,}2}\right)^{1/5} - 1 = 0{,}04$$

b. Dividendos proyectadas para los años 1, 2 y 3.

$$Div_t = Div_0(1+g)^t \qquad Div_1 = 1{,}46(1+0{,}04)^1 = 1{,}5184$$

$$Div_2 = 1{,}46(1+0{,}04)^2 = 1{,}579136$$

$$Div_3 = 1{,}46(1+0{,}04)^3 = 1{,}64230144$$

c. Precio actual de la acción con crecimiento constante. Al tomar el valor de 1,46 um como el dividendo actual y aplicar la fórmula (8.4) se tiene:

$$P = \frac{Div_1}{k_e - g} \qquad P = \frac{1{,}5184}{0{,}12 - 0{,}04} = 18{,}98$$

Ejemplo 8.6
Hoy una acción común se vende a 20 um; se espera que dentro de un año esta acción pague un dividendo anual de 1,80 um y que estos dividendos crezcan a una tasa uniforme durante un período indeterminado. Calcule la tasa de crecimiento si un inversionista requiere una tasa de rendimiento que es una TEA de 0,13.

Solución
Con los datos k_e=0,13; Div_1=1,8; P=20 y con la fórmula (8.6) se calcula g.

$g = k_e - \frac{Div_1}{P}$ $g = 0{,}13 - \frac{1{,}8}{20} = 0{,}0117$

8.6 Valor presente de una anualidad cuyas rentas crecen con una tasa g (i=g) y es posible determinar el número de rentas

Si el número de rentas tiende hacia infinito, pero es posible determinar el valor de n, y además $i = g$; entonces el valor presente de la renta, se obtiene del siguiente modo.

$$P = \frac{R_1}{(1+i)} + \frac{R_1(1+g)^1}{(1+i)^2} + \frac{R_1(1+g)^2}{(1+i)^3} + \frac{R_1(1+g)^3}{(1+i)^4} + \cdots \quad (1)$$

Si i = g

$$P = \frac{R_1}{(1+g)} + \frac{R_1(1+g)^1}{(1+g)^2} + \frac{R_1(1+g)^2}{(1+g)^3} + \frac{R_1(1+g)^3}{(1+g)^4} + \cdots \quad (2)$$

$$P = \frac{R_1}{(1+g)} + \frac{R_1}{(1+g)} + \frac{R_1}{(1+g)} + \frac{R_1}{(1+g)} + \cdots \quad (3)$$

$$P = \frac{nR_1}{(1+g)} \quad (4)$$

$$\boxed{P = \frac{nR_1}{1+g}} \quad (8.8)$$

La fórmula (8.8) calcula el valor presente de una anualidad cuyas rentas tienden hacia infinito, crecen con una tasa constante g ($i = g$), pero es posible determinar el número de rentas, en la cual i y g deben ser del mismo período de R_1.

Ejemplo 8.7
Calcule el precio de una acción común, cuyo dividendo del próximo año se estima en 1,50 um y se estima que estos dividendos anuales crezcan indefinidamente a una tasa efectiva anual de 0,08. El inversionista planea retener dicha acción durante diez años y requiere una tasa de rendimiento de 0,08 anual.

Solución
Con los datos $n=10$; $R_1=1,5$; $g=0,08$ y con la fórmula (8.8) se calcula P.

$$P = \frac{nR_1}{1+g} \qquad P = \frac{10\times 1,5}{1+0,08} = 13,89$$

8.7 Valor presente de una perpetuidad simple anticipada cuya renta inicial es distinta de las demás

En el caso de que el importe de la renta anticipada Ra ubicada en el momento 0 sea diferente al importe de las demás rentas vencidas R de la perpetuidad, el valor presente será igual a la renta anticipada, más el valor presente de la perpetuidad vencida.

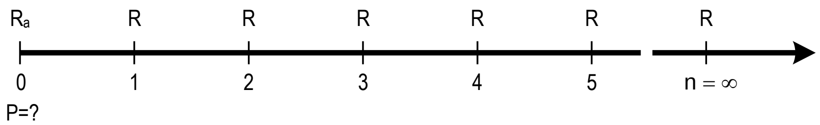


Figura 8.9 Anualidad con rentas perpetuas cuya primera renta en el momento 0 es distinta de las demás rentas perpetuas.

Dado que el valor presente de una perpetuidad simple vencida es $P = R\left[\frac{1}{i}\right]$, al adicionar la renta anticipada que se realiza en el momento cero, se tiene:

$$\boxed{P = R_a + R\left[\frac{1}{i}\right]} \quad (8.9)$$

La fórmula (8.9) calcula el valor presente de una perpetuidad simple anticipada cuya renta inicial es distinta de las demás.

Ejemplo 8.8

Una fundación ofrece una donación a perpetuidad a una universidad; estipula que el primer importe de 10 000 um que se efectuará a inicios del primer año se aplique a la adquisición de libros, y los siguientes importes de 5 000 um (que se entregarán cada fin de año en forma indefinida, se destinen al mantenimiento de la institución. Calcule el valor presente de esa donación si el costo de oportunidad del capital es una TEA de 0,1.

Solución

Con los datos R_a=10 000; R=5 000; i=0,1; y con la fórmula (8,9) se calcula P.

$P = R_a + R\left[\frac{1}{i}\right]$ $\quad$ $P = 10\,000 + 5\,000\left[\frac{1}{0,1}\right]$ $\quad$ $P = 10\,000 + 50\,000 = 60\,000$

8.8 Valor presente de una perpetuidad simple diferida vencida

Para calcular el valor presente de una perpetuidad simple diferida vencida puede utilizarse la fórmula del valor presente de una anualidad simple diferida vencida temporal, fórmula (4.1a) y reemplazar su FAS por el FAS de una renta perpetua vencida que se obtuvo con la fórmula (8.1a).

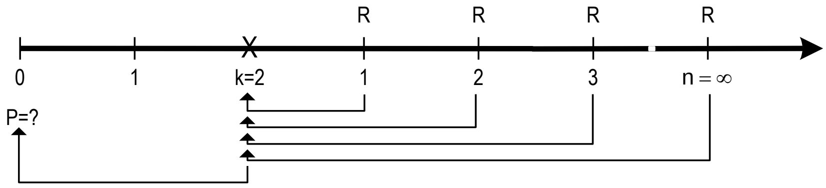


Figura 8.10 Perpetuidad vencida con 2 períodos diferidos.

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]\left[\frac{1}{(1+i)^k}\right]$$ fórmula (4.1a)

$$P = R\left[\frac{1}{i}\right]$$ fórmula (8.1a)

$$P = R\left[\frac{1}{i}\right]\left[\frac{1}{(1+i)^k}\right]$$ Al reemplazar el FAS de (4.1a) por el FAS de (8.1a)

$$\boxed{P = R\left[\frac{1}{i(1+i)^k}\right]} \qquad (8.10)$$

La fórmula (8.10) calcula el valor presente de una perpetuidad simple vencida diferida k períodos de renta, en la cual i y k tienen que ser del mismo período de R.

Ejemplo 8.9

El dueño de una mina con reservas de explotación probadas para un plazo mayor a 100 años tiene una utilidad neta promedio anual de 18 000 um. Calcule el valor presente de la mina con el objeto de venderla ahora; se conoce que los próximos dos años la mina no operará por renovación de sus equipos. El dueño percibe por sus inversiones una TEA de 0,15.

Solución

Con los datos R=18 000; i =0,15; k=2; y con la fórmula (8.10) se calcula P.

$$P = R\left[\frac{1}{i(1+i)^k}\right] \qquad P = 18\,000\left[\frac{1}{0,15(1+0,15)^2}\right]$$

$$P = 18\,000 \times 5,040957782 = 90\,737,24$$

8.9 Valor presente de una perpetuidad simple diferida anticipada

Para calcular el valor presente de una perpetuidad simple diferida anticipada, puede utilizarse la fórmula del valor presente de una anualidad simple diferida anticipada temporal (fórmula 4.2a) y reemplazar su FAS por el FAS de una renta perpetua (fórmula 8.1a).

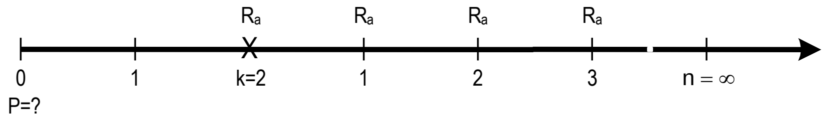


Figura 8.11 Perpetuidad con rentas anticipadas y 2 períodos diferidos.

$$P = R_a(1+i)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right]\left[\frac{1}{(1+i)^k}\right]$$ fórmula (4.2a)

$$P = R_a\left[\frac{(1+i)}{i}\right]$$ fórmula (8.2a)

$$P = R_a\left[\frac{(1+i)}{i}\right]\left[\frac{1}{(1+i)^k}\right]$$ al reemplazar el FAS de la fórmula (4.2a), por el FAS de (8.1a) de una renta perpetua

$$\boxed{P = R_a\left[\frac{1+i}{i(1+i)^k}\right]} \quad (8.11)$$

La fórmula (8.11) calcula el valor presente de una perpetuidad simple anticipada diferida k períodos de renta, en la cual i es la tasa efectiva de cada período.

Ejemplo 8.10

Una sociedad benéfica obtuvo una donación anual de 5 000 um, de forma indefinida, los mismos que se percibirán a inicios de cada año pero después de haber transcurrido 3 años contados a partir de la fecha. ¿Cuál es el valor presente de esa donación, si se utiliza una TEA de 0,08?

Solución

Con los datos R_a=5 000; i =0,08; k =3; y con la fórmula (8.11) se calcula P.

$$P = R_a\left[\frac{1+i}{i(1+i)^k}\right] \quad P = 5\,000\left[\frac{1+0{,}08}{0{,}08(1+0{,}08)^3}\right] P = 5\,000 \times 10{,}71673525 = 53\,583{,}68$$

8.10 Valor presente de una perpetuidad simple cuyas rentas vencidas se pagan cada cierto número de periodos de tasa

Existen diversas actividades de producción de bienes o servicios cuyos activos deben mantenerse, renovarse o sustituirse periódicamente cada cierto número de años, esto origina desembolsos que constituyen una renta perpetua, como sucede con el mantenimiento de carreteras, puentes, renovación de unidades de transportes, etc. Los primeros desembolsos periódicos para mantener esos activos se pueden graficar del siguiente modo:

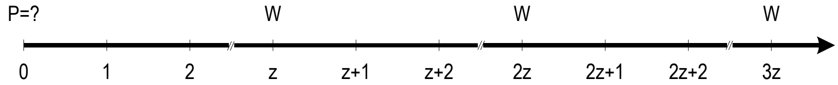


Figura 8.12 Rentas de importe W que deben realizarse cada ciertos períodos de renta, por tiempo indefinido.

¿Cuánto es el importe del valor presente de las rentas perpetuas uniformes W que se realizarán cada z períodos, luego de utilizar una tasa i? Si se divide el horizonte temporal perpetuo en subhorizontes uniformes de z períodos cada uno, el importe W al final de cada subhorizonte puede considerarse como el monto de una anualidad vencida de z rentas de importe R, como se muestra en el siguiente gráfico.

Figura 8.13 Rentas de importe W que se acumularán con las rentas de importe R.

El importe de R en función de un valor futuro W, puede calcularse a partir de la fórmula (2.3a) que puede adaptarse para infinitos subhorizontes temporales.

$$R = S\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \qquad \text{(1) Fórmula (2.3a)}$$

$$R = W\left[\frac{i}{(1+i)^z - 1}\right] \qquad \text{(2) Al hacer S=W y n=z}$$

$$P = R\left[\frac{1}{i}\right] \qquad \text{(3) fórmula (8.1a)}$$

$$P = W\left[\frac{i}{(1+i)^z - 1}\right]\left[\frac{1}{i}\right] \qquad \text{(4) al reemplazar R de (2) por R de (3)}$$

$$\boxed{P = W\left[\frac{i}{(1+i)^z - 1}\right]\left[\frac{1}{i}\right]} \qquad (8.12)$$

La fórmula (8.12) calcula el valor presente de una perpetuidad en la cual las rentas perpetuas vencidas se realizan cada z períodos de tasa.

Ejemplo 8.11

Los cables de acero del puente colgante que une la ciudad de Chosica con el distrito de San Fernando debe remplazarse cada 15 años con una inversión de 15 000 um. Calcule el importe que debe depositarse hoy, para formar un monto que asegure a perpetuidad los reemplazo futuros de dichos cables, si dicho capital percibe una TEA de 0,1.

Solución

Con los datos W=15 000; i =0,1; z=15; y con la fórmula (8.12) se calcula P.

$$P = W\left[\frac{i}{(1+i)^z - 1}\right]\left[\frac{1}{i}\right] \qquad P = 15\,000\left[\frac{0{,}1}{(1+0{,}1)^{15} - 1}\right]\left[\frac{1}{0{,}1}\right]$$

$$P = 15\,000 \times 0{,}031473776 \times 10 = 4\,721{,}07$$

Una inversión de 4 721,07 um colocado hoy a una TEA de 0,1 generará un monto dentro de 15 años de 19 721,07 um el cual asegurará a perpetuidad el importe requerido de 15 000 um para efectuar los reemplazo futuros del puente, tal como se comprueba a continuación:

Monto al finalizar el año 15: 4 721,07 x $1,1^{15}$	19 721,07
Retiro para reemplazar el puente	-15 000,00
Saldo que generará el nuevo monto de 15 000 um	4 721,07

8.11 Renta perpetua vencida

¿Cómo se calcula una renta perpetua si se conoce el importe de su valor presente y su tasa de interés? Por ejemplo, si una persona abre con un depósito de 10 000 um una cuenta de ahorros que devenga una TEM de 0,03 y retira al término de cada mes 300 um. Como la cuenta tiene una duración indefinida y el principal permanece invariable: al término del primer mes se habrá generado un interés de 300 um y como se retira 300 um, el saldo de la cuenta será 10 000 um; al término del segundo mes se generaría nuevamente un interés de 300 um y se retirará 300 um, y el saldo será nuevamente 10 000 um y así sucesivamente.

M (1)	Interés (2)	Retiro (3)	Monto = Monto anterior+(2)-(3)
0			10 000
1	10 000 × 0,03 = 300	300	10 000
2	10 000 × 0,03 = 300	300	10 000
:	:	:	:

Una renta uniforme perpetua vencida puede verse entonces, como el flujo de efectivo generado periódicamente por una tasa de interés, en un horizonte temporal infinito, que se retira al término de cada período: $R = Pi$.

El mismo resultado puede obtenerse al despejar R de la fórmula (8.1a) $P = R\left[\frac{1}{i}\right]$.

$$\boxed{R = Pi} \quad (8.13)$$

La fórmula (8.13) calcula la renta perpetua vencida de una anualidad simple cuyo horizonte temporal es infinito y en la cual i es la tasa efectiva del período de renta. En este caso la tasa i constituye el FRC cuando n tiende a $+\infty$.

Ejemplo 8.12
Una persona decidió abrir una cuenta con un importe de 80 000 um en un banco que remunera a los ahorros con una TEA de 0,06, con el objeto de retirar indefinidamente una renta anual vencida. Calcule el importe de esa renta perpetua.

Solución
Con los datos P=80 000; TEA=0,06 y con la fórmula (8.13) se calcula R.

$R = Pi$ $\qquad$ $R = 80\ 000 \times 0{,}06 = 4\ 800$

8.12 Renta perpetua anticipada

A partir de la fórmula (8.13) que calcula la renta perpetua vencida, se calcula la renta anticipada, al reemplazar R por Ra.

$$R = Pi \quad \text{fórmula (8.13)}$$

$$R_a(1+i) = Pi \quad \text{Renta anticipada equivalente a renta vencida}$$

$$\boxed{R_a = P\left[\frac{i}{1+i}\right]} \quad (8.14)$$

La fórmula (8.14) calcula la renta perpetua anticipada de una anualidad simple cuyo horizonte temporal es infinito, en la cual i es la tasa efectiva del período de renta.

Ejemplo 8.13

Calcule el importe de la renta anual uniforme perpetua anticipada que puede generar un capital de 100 000 um; este capital devenga una TEA de 0,08.

Solución

Con los datos P=100 000; TEA=0,08; y con la fórmula (8.14) se calcula R_a.

$$R_a = P\left[\frac{i}{1+i}\right] \qquad R_a = 100\,000\left[\frac{0{,}08}{1+0{,}08}\right]$$

$$R_a = 100\,000 \times 0{,}074074074 = 7\,407{,}41$$

8.13 Cálculo de i (TIR) en una perpetuidad

El valor de i se obtiene al despejarla de sus respectivas fórmulas de perpetuidades, ya sea el valor presente (fórmula 8.13) o la renta uniforme (fórmula 8.14) de la perpetuidad:

$R = Pi$ Fórmula (8.13)

$R_a = P\left[\frac{i}{1+i}\right]$ Fórmula (8.14)

$$\boxed{i = \frac{R}{P}} \quad (8.15) \qquad \boxed{i = \frac{R_a}{P - R_a}} \quad (8.16)$$

Las fórmulas (8.15) y (8.16) calculan la TIR de una perpetuidad vencida y anticipada respectivamente.

Ejemplo 8.14

¿Cuál debe ser la TEA de una cuenta abierta con un importe de 10 000 um para que produzca una renta perpetua mensual vencida de 250 um?

Solución

Con los datos P=10 000; y R=250 se calcula i =TEM a partir de la fórmula (8.15).

$i = \frac{R}{P}$ $\qquad i = \frac{250}{10\,000} = 0{,}025$

$TEA = (1 + TEM)^{12} - 1$ $\qquad TEA = 1{,}025^{12} - 1 = 0{,}344888824$

Ejemplo 8.15

Para que una cuenta abierta con un importe de 20 000 um produzca una renta perpetua trimestral anticipada de 350 um ¿cuál debe ser su TET?

Solución

Con los datos P=20 000; y R_a=350 se calcula i =TET con la fórmula (8.16).

$i = \frac{R_a}{P-R_a}$ $\qquad i = \frac{350}{20\,000-350} = 0{,}017811704$

8.14 Costo capitalizado

El *costo capitalizado* de un activo fijo está constituido por su costo inicial más el valor presente de las infinitas renovaciones para poseerlo permanentemente, como sucede en el caso de bienes que deben prestar servicios en forma indefinida, por ejemplo: caminos, puentes, muelles, pavimentos, etc. La diferencia con la capitalización es que ésta excluye el costo inicial del activo. Las renovaciones de activos fijos permanentes se producen necesariamente al final de su vida útil, su nuevo costo depende de las condiciones del mercado; por lo tanto, puede ser diferente al costo original del bien.

Si se designa:

C = costo capitalizado del activo

F = costo original o inicial del activo

W = costo de reemplazo del activo

z = número de años de vida útil del activo

i = tasa de interés periódica

y de acuerdo con el concepto de costo capitalizado de un activo fijo: costo original + valor presente de las infinitas renovaciones, se tiene:

$C = F + P$ (a)

En este caso P constituye el valor presente de una perpetuidad con rentas que se realizan cada z períodos, cuyo valor se calcula con la fórmula del valor presente de una perpetuidad simple cuyas rentas se realizan cada cierto número de periodos de tasa, fórmula (8.12); si se remplaza (a) en (8.12), se tiene:

$P = W\left[\frac{i}{(1+i)^z-1}\right]\left[\frac{1}{i}\right]$ (8.12)

$$\boxed{C = F + W\left[\frac{i}{(1+i)^z-1}\right]\left[\frac{1}{i}\right]} \quad (8.17)$$

La fórmula (8.17) calcula el costo capitalizado de un activo fijo en la cual i, y z son del mismo período.

Ejemplo 8.16
La canalización de las riberas del río Rímac en la zona del centro de Lima tuvo un costo de 400 000 um. Los técnicos estimaron que cada 15 años debía limpiarse y reforzarse los muros de contención a un costo aproximado de 150 000 um; este trabajo debe realizarse para mantener en óptimas condiciones operativas esa infraestructura. Calcule el costo capitalizado con una TEA de 0,08.

Solución
Con los datos F=400 000; z=15; i=0,08; W=150 000; y con la fórmula (8.17) se calcula C.

$$C = F + W\left[\frac{i}{(1+i)^z-1}\right]\left[\frac{1}{i}\right]$$

$$C = 400\,000 + 150\,000\left[\frac{0{,}08}{(1+0{,}08)^{15}-1}\right]\left[\frac{1}{0{,}08}\right]$$

$$C = 400\,000 + 150\,000 \times 0{,}03682954493 \times 12{,}5$$

$$C = 469\,055{,}40$$

El importe de 469 055,40 um permitirá cubrir el costo original de 400 000 um para canalizar el río Rímac, el saldo de 69 055,40 um al cabo de 15 años se habrá convertido en 219 055,40 um a la TEA de 0,08, lo que permitirá cubrir el importe de 150 000 um para limpiar y reforzar los muros de contención y dejar un remanente de 69 055,40 um que permitirá generar indefinidamente un nuevo monto para la limpieza y refuerzos posteriores cada 15 años.

a. Costo original	400 000,00
b. Saldo que generará el monto para limpieza y refuerzos	69 055,40
c. Costo capitalizado (a.+ b.)	469 055,40
d. Monto generado cada 15 años por el saldo: $69\ 055{,}4 \times 1{,}08^{15}$	219 055,40
e. Importe requerido cada 15 años para limpieza y refuerzos	150 000,00
f. Saldo que generará cada 15 años la perpetuidad de 219055,40 (d.- e.)	69 055,40

8.15 Costo capitalizado cuando F es igual a W

Si el costo original F del activo fijo es igual que su respectivo costo de reemplazo W, entonces la fórmula (8.17) puede modificarse del siguiente modo:

$$C = F + W\left[\frac{i}{(1+i)^z - 1}\right]\left[\frac{1}{i}\right]$$

$$F = W$$

$$C = F + F\left[\frac{1}{(1+i)^z - 1}\right]$$

$$C = F\left[1 + \frac{1}{(1+i)^z - 1}\right]$$

$$C = F\left[\frac{(1+i)^z - 1 + 1}{(1+i)^z - 1}\right]$$

$$C = F\left[\frac{(1+i)^z}{(1+i)^z - 1}\right]$$

Al multiplicar el segundo miembro de la ecuación por $\frac{i}{i}$ se tiene:

$$\boxed{C = \frac{F}{i}\left[\frac{i(1+i)^z}{(1+i)^z - 1}\right]} \qquad (8.18)$$

La fórmula (8.18) calcula el costo capitalizado de un activo fijo cuando el costo original del activo es igual que su costo de reemplazo, en la cual i, y z son del mismo período.

Ejemplo 8.17

Calcule el costo capitalizado de una camioneta cuyo precio de adquisición es 15 000 um, su vida útil es 5 años y el costo de sus futuros remplazos tienen el mismo costo que el original. Considere una TEA de 0,07.

Solución

Con los datos F=15 000; z=5; i =0,07; y con la fórmula (8.18) se calcula C.

$$C = \frac{F}{i}\left[\frac{i(1+i)^z}{(1+i)^z - 1}\right] \qquad C = \frac{15\,000}{0{,}07}\left[\frac{0{,}07(1+0{,}07)^5}{(1+0{,}07)^5 - 1}\right]$$

$$C = 214\,285{,}71 \times 0{,}2438906944 = 52\,262{,}29$$

Ejemplo 8.18

La carpintería metálica de fierro que debe instalarse en un edificio construido frente al mar, tiene un costo de 20 000 um y una vida útil estimada de 10 años. Alternativamente se evalúa la posibilidad de colocar una carpintería de aluminio con un costo de 30 000 um y una vida útil estimada de 20 años. Asuma que el costo de reemplazo de los activos será del mismo importe que su costo original, que la TEA es 0,15 y calcule el costo capitalizado de cada alternativa.

Solución

Para hallar la alternativa más conveniente se calcula el costo capitalizado de cada activo con la fórmula (8.18).

Carpintería de fierro

$$C = \frac{20\,000}{0{,}15}\left[\frac{0{,}15(1+0{,}15)^{10}}{(1+0{,}15)^{10} - 1}\right]$$

$$C = 133\,333{,}33 \times 0{,}1992520625$$

$$C = 26\,566{,}94$$

Carpintería de aluminio

$$C = \frac{30\,000}{0{,}15}\left[\frac{0{,}15(1+0{,}15)^{20}}{(1+0{,}15)^{20} - 1}\right]$$

$$C = 200\,000 \times 0{,}1597614704$$

$$C = 31\,952{,}29$$

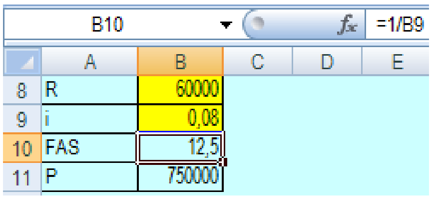
8.16 Modelos de perpetuidades con Excel

Valor presente de una perpetuidad simple vencida

1. Un asilo de ancianos percibe a perpetuidad una donación de 60 000 um a fin de cada año. ¿Cuánto es el importe del valor presente de esa donación si se utiliza como tasa de evaluación una TEA de 0,08? ¿Cuánto es el valor del FAS?

Solución
Con los datos R=60 000; i =0,08; y con la fórmula (8.1) se calcula P.

$P = R\left[\frac{1}{i}\right]$ $\qquad P = 60\,000\left[\frac{1}{0{,}08}\right]$ $\qquad P = 60\,000 \times 12{,}5 = 750\,000$



B10 =1/B9

	A	B
8	R	60000
9	i	0,08
10	FAS	12,5
11	P	750000

Figura 8.13 Modelo 8.1 que obtiene el FAS y el valor presente de una perpetuidad simple vencida.

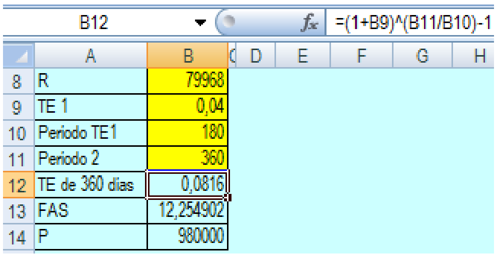
2. Una entidad cultural recibe al final de cada año una donación de 79 968 um a perpetuidad. Con una tasa efectiva semestral de 0,04 calcule el importe del valor presente de esa perpetuidad. ¿Cuánto es el valor del FAS?

Solución
Con los datos R=79 968; i =0,0816; y con la fórmula (8.1) se calcula P.

$TEA = (1 + TES)^2 - 1$ $\qquad TEA = (1 + 0{,}04)^2 - 1 = 0{,}0816$

$P = R\left[\frac{1}{i}\right]$ $\qquad P = 79\,968\left[\frac{1}{0{,}0816}\right]$

$$P = 79\,968 \times 12{,}25490196 = 980\,000$$



B12 =(1+B9)^(B11/B10)-1

	A	B
8	R	79968
9	TE 1	0,04
10	Periodo TE1	180
11	Periodo 2	360
12	TE de 360 días	0,0816
13	FAS	12,254902
14	P	980000

Figura 8.14 Modelo 8.2 que obtiene el FAS y el valor presente de una perpetuidad simple vencida, con una tasa equivalente.

Valor presente de una perpetuidad simple anticipada

3. Calcule el valor presente de una perpetuidad con rentas trimestrales anticipadas de 10 000 um y una TEA de 0,12. ¿Cuánto es el valor del FAS anticipado?

Solución
Con los datos Ra=10 000; i =0,0287373447; y con la fórmula (8.2) se calcula P.

$TET = (1 + TEA)^{1/4} - 1$ $\qquad TET = (1 + 0{,}12)^{1/4} - 1 = 0{,}028737345$

$P = R_a\left[\frac{(1+i)}{i}\right]$ $\qquad P = 10\,000\left[\frac{1+0{,}0287373447}{0{,}0287373447}\right]$

$$P = 10\,000 \times 35{,}797926171 = 357\,979{,}26$$

B13 | f_x | =(1+B12)/B12

	A	B
8	Ra	10000
9	TE 1	0,12
10	Periodo TE1	360
11	Periodo 2	90
12	TE de 90 días	0,0287373447
13	FAS	35,797926171
14	P	357979,26

Figura 8.15 Modelo 8.3 que obtiene el FAS anticipado y el valor presente de una perpetuidad simple anticipada, con una tasa equivalente.

Valor presente de una perpetuidad cuyas rentas vencidas crecen con una tasa g (i > g)

4. Una empresa estima que sus ingresos operativos anuales netos del próximo año sean 80 000 um; asimismo proyecta que luego crecerán anualmente a una tasa constante de 0,05. Calcule el valor presente de esos flujos de caja perpetuos con una TEA de 0,12.

Solución
Con los datos R_1=80 000; i =0,12; g =0,05; y con la fórmula (8.3) se calcula P.

$P = \frac{R_1}{i-g}$ $\qquad$ $P = \frac{80\ 000}{0{,}12-0{,}05} = 1\ 142\ 857{,}14$

B11 | f_x | =B8/(B9-B10)

	A	B
8	R_1	80000
9	i	0,12
10	g	0,05
11	P	1142857,14

Figura 8.16 Modelo 8.4 que obtiene el valor presente de una perpetuidad con rentas vencidas que crecen con una tasa g.

5. Se estima que los dividendos de una empresa crezcan 4% anual en forma indefinida. Si se proyecta que el dividendo del próximo año sea 2,2 um y la tasa de rendimiento requerida es 0,15 anual, ¿cuánto es el precio actual de la acción?

Solución
Con los datos Div_1=2,2; k_e =0,15; g =0,04; y con la fórmula (8.4) se calcula P.

$P = \frac{Div_1}{k_e-g}$ $\qquad$ $P = \frac{2{,}2}{0{,}15-0{,}04} = 20$

B11 | f_x | =B8/(B9-B10)

	A	B
8	Div_1	2,2
9	k_e	0,15
10	g	0,04
11	P	20,0

Figura 8.17 Modelo 8.5 que obtiene el precio de una acción cuyos dividendos crecen con una tasa constante g.

Valor presente de una anualidad cuyas rentas crecen con una tasa g (i = g) y es posible determinar el número de rentas

6. Una perpetuidad cuya renta del próximo año se estima en 4 000 um, crecerá 8% anualmente durante 15 años. Si la tasa de rentabilidad requerida es una TEA de 0,08 ¿cuánto es el valor presente de dicha rentas?

Solución
Con los datos n=15; R_1 =4 000; g =0,08; y con la fórmula (8.8) se calcula P.

$P = \frac{nR_1}{1+g}$ $\qquad$ $P = \frac{15 \times 4\ 000}{1+0{,}08} = 55\ 555{,}56$

B11 | f_x | =(B8*B9)/(1+B10)

	A	B	C	D	E	F
8	n	15				
9	R_1	4000				
10	g	0,08				
11	P	55555,56				

Figura 8.18 Modelo 8.6 que obtiene el valor presente de una anualidad cuyas rentas crecen con una tasa g y i=g.

Valor presente de una perpetuidad simple anticipada cuya renta inicial es distinta de las demás

7. Una empresa efectúa a un colegio de minusválidos una donación de 80 000 um para la compra de un inmueble, adicionalmente cada año abonará 20 000 um indefinidamente para mantenimiento del inmueble. ¿Cuánto es el valor actual de la donación si la tasa de evaluación es una TEA de 0,08?

Solución

Con los datos R_a=80 000; R=20 000; i =0,08; y con la fórmula (8.9) se calcula P.

$P = R_a + R\left[\frac{1}{i}\right]$ $\qquad$ $P = 80\,000 + 20\,000\left[\frac{1}{0{,}08}\right] = 330\,000$

B11 | f_x | =B8+B9/B10

	A	B	C	D	E	F
8	Ra	80000				
9	R	20000				
10	i	0,08				
11	P	330000				

Figura 8.19 Modelo 8.7 que obtiene el valor presente de una perpetuidad anticipada cuya rentas inicial es distinta de las demás.

Valor presente de una perpetuidad simple diferida vencida

8. Un taller de maquinado de piezas metálicas que opera en la ciudad de Lima desde el siglo pasado, suspenderá sus operaciones durante un plazo de 6 meses por cambio de local. Luego de este cambio, considera que sus nuevos ingresos netos mensuales asciendan a 50 000 um por tiempo indefinido. Calcule el valor actual de los ingresos netos con una tasa de rendimiento que es una TEA de 0,18.

Solución

Con los datos R=50 000; i= 0,0138884303; k=6; y con la fórmula (8.10) se calcula P.

$TEM = (1 + TEA)^{1/12} - 1$ $\qquad$ $TEM = (1 + 0{,}18)^{1/12} - 1 = 0{,}013884303$

$P = R\left[\frac{1}{i(1+i)^k}\right]$ $\qquad$ $P = 50\,000\left[\frac{1}{0{,}013884303 \times 1{,}013884303^6}\right] = 3\,314\,178{,}04$

B14 | f_x | =1/(B12*(1+B12)^B13)

	A	B	C	D	E	F
8	R	50000				
9	i	0,18				
10	Periodo TE	360				
11	Periodo TE 2	30				
12	TE de 30 dias	0,0138884303				
13	k	6				
14	FAS	66,2835608				
15	P	3314178,04				

Figura 8.20 Modelo 8.8 que obtiene el valor presente de una perpetuidad simple diferida vencida.

Valor presente de una perpetuidad simple diferida anticipada

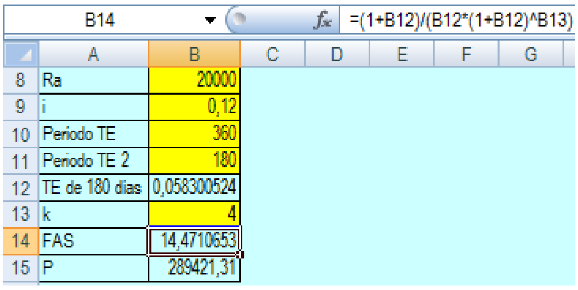
9. Hoy una empresa firmó un contrato de donación de 20 000 um para un colegio de niños especiales, este importe se entregará a inicios de cada semestre en forma indefinida, después de haber transcurrido dos años a partir de hoy. ¿Cuánto es el valor presente de esa donación si la tasa de rendimiento es una TEA de 0,12?

Solución

Con los datos Ra=20 000; i= 0,058300524; k=4; y con la fórmula (8.11) se calcula P.

$TES = (1 + TEA)^{1/2} - 1$ $\qquad$ $TES = (1 + 0{,}12)^{1/2} - 1 = 0{,}058300524$

$P = R_a\left[\frac{1+i}{i(1+i)^k}\right]$ $\qquad$ $P = 20\,000\left[\frac{1+0{,}058300524}{0{,}058300524(1+0{,}058300524)^4}\right] = 289\,421{,}31$



B14 =(1+B12)/(B12*(1+B12)^B13)

	A	B
8	Ra	20000
9	i	0,12
10	Periodo TE	360
11	Periodo TE 2	180
12	TE de 180 días	0,058300524
13	k	4
14	FAS	14,4710653
15	P	289421,31

Figura 8.21 Modelo 8.9 que obtiene el valor presente de una perpetuidad simple diferida anticipada.

Valor presente de una perpetuidad simple cuyas rentas se pagan cada cierto número de períodos de tasa

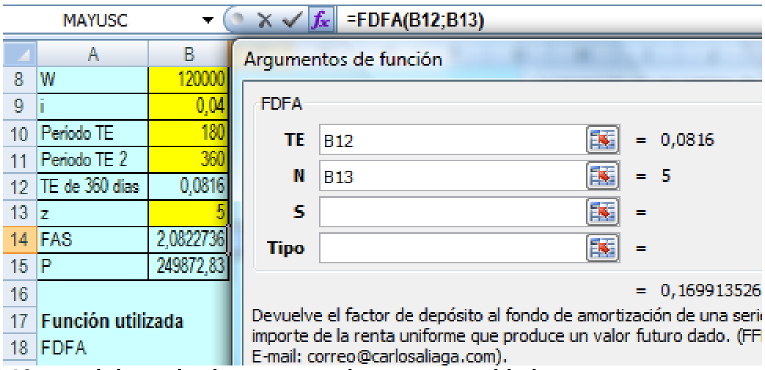
10. La inversión en un camino de herradura que realizó el gobierno regional de Huancavelica fue 200 000 um. Los ingenieros estiman que cada 5 años deberán refirmar el camino, trabajo que demanda una inversión de 120 000 um. ¿Qué importe deberá depositarse en un fondo para realizar los trabajos futuros a perpetuidad, si el fondo devenga una tasa efectiva semestral de 0,04?

Solución

Con los datos W=120 000; i = 0,0816; z=5; y con la fórmula (8.12) se calcula P.

$TEA = (1 + TES)^2 - 1 \qquad TEA = (1 + 0{,}04)^2 - 1 = 0{,}0816$

$P = W\left[\frac{i}{(1+i)^z-1}\right]\left[\frac{1}{i}\right] \qquad P = 120\ 000\left[\frac{0{,}0816}{1{,}0816^2-1}\right]\left[\frac{1}{0{,}0816}\right] = 249\ 872{,}83$



MAYUSC =FDFA(B12;B13)

	A	B
8	W	120000
9	i	0,04
10	Periodo TE	180
11	Periodo TE 2	360
12	TE de 360 días	0,0816
13	z	5
14	FAS	2,0822736
15	P	249872,83
16		
17	Función utilizada	
18	FDFA	

Figura 8.22 Modelo 8.10 que obtiene el valor presente de una perpetuidad cuyas rentas se pagan cada cierto número de períodos de tasa. Utiliza la función FDFA para hallar el FAS de la perpetuidad.

Renta perpetua vencida

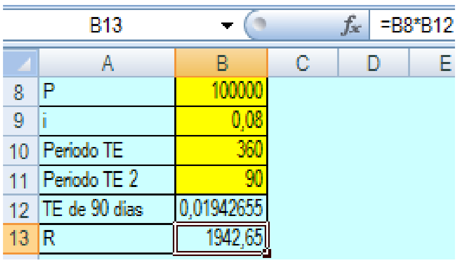
11. Si puede colocarse en un banco 100 000 um que devengan una TEA de 0,08; ¿a cuánto asciende el importe de la renta uniforme trimestral vencida que puede retirarse en forma perpetua?

Solución

Con los datos P=100 000; i = 0,01942655 y con la fórmula (8.13) se calcula R.

$TET = (1 + TEA)^{1/4} - 1 \qquad TET = (1 + 0{,}08)^{1/4} - 1 = 0{,}01942655$

$R = Pi \qquad R = 100\ 000 \times 0{,}01942655 = 1\ 942{,}65$



B13 =B8*B12

	A	B
8	P	100000
9	i	0,08
10	Periodo TE	360
11	Periodo TE 2	90
12	TE de 90 días	0,01942655
13	R	1942,65

Figura 8.23 Modelo 8.11 que obtiene la renta perpetua vencida.

Renta perpetua anticipada

12. Si se coloca en un banco 80 000 um que devengan una TEA de 0,06; ¿a cuánto asciende el importe de la renta uniforme semestral anticipada que puede retirarse a perpetuidad?

Solución

Con los datos P=80 000; i = 0,02956301 y con la fórmula (8.14) se calcula Ra.

$TES = (1 + TEA)^{1/2} - 1 \qquad TES = (1 + 0{,}06)^{1/2} - 1 = 0{,}029563014$

$R_a = P\left[\frac{i}{1+i}\right] \qquad R_a = 80\,000\left[\frac{0{,}029563014}{1+0{,}029563014}\right] = 2\,297{,}13$

B13 | f_x =B12/(1+B12)

	A	B
8	P	80000
9	i	0,06
10	Periodo TE	360
11	Periodo TE 2	180
12	TE de 180 días	0,02956301
13	FAS	0,02871414
14	Ra	2297,13

Figura 8.24 Modelo 8.12 que obtiene la renta perpetua anticipada.

Cálculo de i (TIR) en una perpetuidad

13. Se estima que un proyecto de una hidroeléctrica requiere una inversión de 500 000 um; este proyecto puede generar rentas anuales netas de 60 000 um. Calcule la TIR de este proyecto.

Solución

Con los datos R=60 000; P = 500 000 y con la fórmula (8.15) se calcula la TIR.

$i = \frac{R}{P} \qquad i = \frac{60\,000}{500\,000} = 0{,}12$

B10 | f_x =B8/B9

	A	B
8	R	60000
9	P	500000
10	i	0,12

Figura 8.25 Modelo 8.13 que obtiene la TIR de una perpetuidad vencida.

14. Un proyecto que requiere una inversión de 675 000 um puede generar a perpetuidad rentas anuales anticipadas de 50 000 um. Calcule la TIR de este proyecto.

Solución

Con los datos Ra=50 000; P = 675 000 y con la fórmula (8.16) se calcula la TIR.

$i = \frac{R_a}{P - R_a} \qquad i = \frac{50\,000}{675\,000 - 50\,000} = 0{,}08$

B10 | f_x =B8/(B9-B8)

	A	B
8	Ra	50000
9	P	675000
10	i	0,08

Figura 8.26 Modelo 8.14 que obtiene la TIR de una perpetuidad anticipada.

Costo capitalizado

15. Un puente sobre un río de la sierra sur requiere una inversión de 400 000 um, y su mantenimiento para que dure indefinidamente debe efectuarse cada 5 años con inversiones adicionales de 80 000 um. Calcule su costo capitalizado con una TEA de 0,12.

Solución

Con los datos F=400 000; W = 80 000; i =0,12; z=5 y con la fórmula (8.17) se calcula el costo capitalizado del activo.

$$C = F + W\left[\frac{i}{(1+i)^z - 1}\right]\left[\frac{1}{i}\right]$$

$$C = 400\ 000 + 80\ 000\left[\frac{0{,}12}{1{,}12^5 - 1}\right]\left[\frac{1}{0{,}12}\right] = 504\ 939{,}82$$

B13 =B8+B9*B12*(1/B10)

	A	B	C	D	E	F	G
8	F	400000					
9	W	80000					
10	i	0,12					
11	z	5					
12	FDFA	0,157409732					
13	C	504939,82					

Figura 8.27 Modelo 8.15 que obtiene el costo capitalizado de un activo

Costo capitalizado cuando F es igual a W

16. La construcción de un canal para un río que atraviesa una ciudad de la costa norte, demanda una inversión de 200 000 um; para que este canal cumpla su objetivo, debe realizar se una inversión adicional por el mismo importe cada 4 años. Si el costo de oportunidad del capital es una TEA de 0,12 calcule el costo capitalizado de esa inversión perpetua.

Solución

Con los datos F=200 000; i =0,12; z=4 y con la fórmula (8.18) se calcula el costo capitalizado del activo.

$$C = \frac{F}{i}\left[\frac{i(1+i)^z}{(1+i)^z - 1}\right] \qquad C = \frac{200\ 000}{0{,}12}\left[\frac{0{,}12(1+0{,}12)^4}{(1+0{,}12)^4 - 1}\right] = 548\ 724{,}06$$

B12 =B8/B9*B11

	A	B	C	D	E	F
8	F	200000				
9	i	0,12				
10	z	4				
11	FRC	0,3292344				
12	C	548724,06				

Figura 8.28 Modelo 8.16 que obtiene el costo capitalizado de un activo cuando F=W.

8.17 Listado de fórmulas

Fórmula		Obtiene
$P = R\left[\frac{1}{i}\right]$	(8.1)	Valor presente de una perpetuidad simple vencida. El término entre corchetes es el FAS vencido cuando n tiende hacia infinito.
$P = R_a\left[\frac{(1+i)}{i}\right]$	(8.2)	Valor presente de una perpetuidad simple anticipada. El término entre corchetes es el FAS anticipado cuando n tiende hacia infinito.
$P = \frac{R_1}{i-g}$	(8.3)	Valor presente de una perpetuidad cuyas rentas crecen con una tasa g (i > g).
$P = \frac{Div_1}{k_e - g}$	(8.4)	Modelo de Gordon de valuación de dividendos con crecimiento constante y vida infinita.
$k_e = \frac{Div_1}{P} + g$	(8.5)	Calculo de k_e en el modelo de dividendos con crecimiento constante.
$g = k_e - \frac{Div_1}{P}$	(8.6)	Calculo de g en el modelo de dividendos con crecimiento constante.
$Div_t = Div_0(1+g)^t$	(8.7)	Calculo de los dividendos futuros sobre la base de los dividendos del año 0, en el modelo de dividendos con crecimiento constante.
$P = \frac{nR_1}{1+g}$	(8.8)	Valor presente de una anualidad cuyas rentas crecen con una tasa g (i = g), pero es posible determinar el número de rentas.
$P = R_a + R\left[\frac{1}{i}\right]$	(8.9)	Valor presente de una perpetuidad simple anticipada cuya renta inicial es distinta de las demás.
$P = R\left[\frac{1}{i(1+i)^k}\right]$	(8.10)	Valor presente de una perpetuidad simple vencida diferida k períodos de renta.
$P = R_a\left[\frac{1+i}{i(1+i)^k}\right]$	(8.11)	Valor presente de una perpetuidad simple anticipada diferida k períodos de renta.
$P = W\left[\frac{i}{(1+i)^z - 1}\right]\left[\frac{1}{i}\right]$	(8.12)	Valor presente de una perpetuidad simple cuyas rentas se realizan cada z de períodos de tasa.
$R = Pi$	(8.13)	Renta perpetua vencida.
$R_a = P\left[\frac{i}{1+i}\right]$	(8.14)	Renta perpetua anticipada.
$i = \frac{R}{P}$	(8.15)	TIR de una perpetuidad vencida.
$i = \frac{R_a}{P - R_a}$	(8.16)	TIR de una perpetuidad anticipada.
$C = F + W\left[\frac{i}{(1+i)^z - 1}\right]\left[\frac{1}{i}\right]$	(8.17)	Costo capitalizado de un activo fijo.
$C = \frac{F}{i}\left[\frac{i(1+i)^z}{(1+i)^z - 1}\right]$	(8.18)	Costo capitalizado cuando F es igual a W.

Preguntas de autoevaluación

1. ¿Qué es una perpetuidad? Ponga ejemplos de perpetuidades.
2. Comente sobre los principales casos que pueden presentarse en el estudio de las perpetuidades.
3. ¿Cuál es la fórmula para hallar el monto de una perpetuidad? Explique.
4. Deduzca algebraicamente la fórmula del valor presente de una perpetuidad vencida.
5. A partir de la fórmula del valor presente de una perpetuidad vencida, obtenga la fórmula del valor presente de una perpetuidad anticipada.
6. Deduzca algebraicamente la fórmula del valor presente de una perpetuidad cuyas rentas vencidas crecen con una tasa g, si i > g.
7. Escriba la fórmula del modelo de Gordon y Shapiro de dividendos con crecimiento constante.
8. ¿Qué fórmula debe usarse para problemas de valor presente de una anualidad cuyo número de rentas tienden hacia infinito, crecen con una tasa g (i=g) y es posible determinar el número de rentas de la operación?
9. Escriba la fórmula del valor presente de una perpetuidad simple anticipada, cuya renta inicial es distinta de las demás.
10. Deduzca la fórmula del valor presente de una perpetuidad simple diferida vencida.
11. Escriba la fórmula del valor presente de una perpetuidad simple cuyas rentas se realizan cada cierto número de períodos de tasa.
12. Escriba las fórmulas de las rentas perpetuas: vencidas y anticipadas.
13. ¿Qué es el costo capitalizado?
14. Demuestre que $P = R_a + \frac{R_a}{i}$ es equivalente a $P = R_a\left[\frac{1+i}{i}\right]$ y a $P = \frac{R_a}{d}$.

Problemas propuestos

Valor presente de una perpetuidad simple vencida

1. La garita de peaje a Pucusana recauda mensualmente el importe de 150 000 um en promedio. ¿Cuánto es el valor presente de esas rentas perpetuas si se descuentan con una TEA de 0,12?

2. La Banca de Inversiones ofrece una tasa de rentabilidad efectiva anual de 0,08 por sus captaciones de recursos. Con el fin de obtener esa tasa de rentabilidad, un empresario ofrece en venta su empresa y pone como precio base la suma de 100 000 um. El promedio de las utilidades netas rendida por esa empresa en los 5 últimos años fue 10 000 um anual. Si usted fuese inversionista, con la información proporcionada y bajo el supuesto que las utilidades anuales se repetirán indefinidamente, ¿hasta qué precio pagaría por la empresa que se encuentra en venta? Si su costo de oportunidad fuese una TEM de 0,01, ¿cuánto pagaría por esa empresa?

3. Con una TEM de 0,01 calcule el valor presente de una renta perpetua trimestral vencida de 5 000 um.

4. Una empresa decidió efectuar la donación de una renta perpetua mensual vencida de 5 000 um a una institución religiosa. Para estos efectos adquirió un determinado importe en Bonos del Gobierno que rediman indefinidamente una TEA de 0,08 con pago de interés cada fin de mes. ¿A cuánto debe ascender la inversión en dichos bonos para que los intereses mensuales cubran el importe de la donación?

5. Un hostal que en la fecha se piensa vender, desde hace varios años genera una renta neta mensual de 2 000 um. Se espera que esta renta se mantenga estable por muchos años más. Un grupo económico interesado en adquirirla exige a sus inversiones una tasa efectiva de rentabilidad anual de 0,2. Con esta información ¿hasta cuánto podría ofrecer para adquirir el hostal?

Valor presente de una perpetuidad simple anticipada

6. Calcule el valor presente de una perpetuidad cuya renta trimestral anticipada es 3000 um. La tasa de evaluación es una TEA de 0,2.

7. Halle el valor actual de una perpetuidad anticipada cuya renta anticipada semestral es 5 000 um y la tasa de interés efectiva anual es 0,12.

Valor presente de una perpetuidad cuyas rentas vencidas crecen con una tasa g (i > g)

8. Se espera que los dividendos del próximo año, de una empresa metal mecánica, sean 2,5 um y que crezcan en una tasa de 0,05 anual. Calcule el valor presente de esta perpetuidad con una TEA de 0,12.

9. Los dividendos de las acciones comunes de la empresa Delta SA han crecido a una tasa de 0,04 durante los últimos 8 años y se espera que continúen con este crecimiento en el futuro. En el presente año los dividendos fueron 1,5 um. ¿Cuánto es el valor de la acción para un inversionista que requiere una tasa de rendimiento que es una TEA de 0,14?

10. Durante la última década los dividendos de la compañía Electro Occidente crecieron desde 0,9 um hasta 1,4 um que es el dividendo que se pagó en el año actual. Los analistas estiman que esta tasa de crecimiento se mantendrá en el futuro por tiempo indefinido. ¿Cuánto es el valor actual de esta acción si el inversionista requiere una tasa de rendimiento que es una TEA de 0,18?

11. Una acción común cuyos dividendos del próximo año se estiman en 1,2 um, se vende en el mercado a un precio de 20 um. Esta acción ha crecido a una tasa uniforme de 0,06 y se espera que siga esta tendencia en el futuro próximo. ¿Cuánto es la tasa de rendimiento de esta acción?

12. La empresa Inversiones Asociadas estima que los dividendos del próximo año lleguen a 1,5 um; actualmente el precio de la acción en el mercado es 20 um. Si los analistas consideran que los dividendos crezcan anualmente a una tasa uniforme y los inversionistas requieren una tasa de rendimiento de 0,14 ¿cuánto debe ser la tasa de crecimiento de los dividendos?

13. Los dividendos de una empresa han experimentado en el pasado una tasa de crecimiento uniforme de 0,06 anual; se espera que estas condiciones se mantengan en el futuro próximo por un tiempo indeterminado. Si los dividendos del presente año fueron 2,3 um ¿cuánto serán los dividendos proyectados de los años 2, 4 y 5?

14. Los dividendos que repartió una empresa durante sus últimos diez años de operación, se presentan en la siguiente tabla.

Año	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dividendos	0,70	0,72	0,81	0,85	0,91	0,93	1,02	1,05	1,12	1,20	1,30

Calcule la tasa g de crecimiento y con este dato proyecte los dividendos para los años 11, 12 y 13.

Valor presente de una anualidad cuyas rentas crecen con una tasa g (i = g) y es posible determinar el número de rentas

15. Con una TEA de 0,1236 calcule el valor presente de una perpetuidad cuya primera renta vencida semestral se estima en 5 000 um, y se proyecta que crezca a una tasa semestral de 0,06 durante 20 años.

16. Un proyecto que tiene una vida útil de 8 años estima que su primer flujo de caja trimestral sea 4 000 um y crezca trimestralmente con una tasa de 0,03. Con una TE semestral de 0,0609 calcule el valor presente de esos flujos.

Valor presente de una perpetuidad simple anticipada cuya renta inicial es distinta de las demás

17. Las entidades perceptoras de donaciones pueden emitir certificados de donación, cuyos importes se consideran como pago a cuenta del impuesto a la renta. Para acogerse a este beneficio, el Directorio de la Fundación GBM & Asociados decidió donar en la fecha al Instituto Americano de Dirección de Empresas, una suma de 8 000 um y de allí en adelante un importe de 5 000 um anualmente en forma indefinida. ¿Cuánto es el valor presente de la donación con una TEA de 0,12?

18. El testamento de una persona recién fallecida establece una donación para un asilo de ancianos de 3 000 um inmediatamente después de acaecido su deceso, y de un importe de 2 000 um anualmente en forma indefinida. ¿Cuál es el valor actual de la donación con una TEA de 0,1?

Valor presente de una perpetuidad simple diferida vencida

19. Una compañía dueña de un pozo petrolero con reservas de explotación probadas para un plazo mayor que 100 años tiene una utilidad neta que en promedio asciende a 840 000 um anualmente. Calcule el valor presente del pozo con el objeto de venderlo; se sabe que en los próximos tres años no habrá ingresos por utilidad debido a que en ese plazo se renovarán sus equipos. La compañía percibe por sus inversiones una TEA de 0,15.

Valor presente de una perpetuidad simple diferida anticipada

20. Un asilo de ancianos consiguió una donación de 8 000 um anual en forma indefinida, la misma que se percibirá a inicios de cada año pero después de haber transcurrido 48 meses contados a partir de hoy. ¿Cuánto es el valor presente de esa donación si la tasa de costo de oportunidad es una TEA de 0,08?

Valor presente de una perpetuidad simple cuyas rentas se pagan cada cierto número de períodos de tasa

21. El tramo de la vía Costa Verde que une San Miguel con Magdalena tuvo un costo original de 500 000 um. Se estima que el carril de la pista pegada al mar deberá ser acondicionada cada 5 años a un costo de 80 000 um. Calcule el importe que se debió depositar en una institución que remunera sus captaciones con una TEA de 0,08, en la fecha que se inauguró el tramo San Miguel-Magdalena, para asegurar a perpetuidad los remplazos futuros de la pista que permanentemente erosiona el mar.

22. Un molino de viento que se utiliza en el bombeo de agua para el regadío de tierras de sembrío tuvo un costo de 90 000 um. Se estima que será necesario efectuar un mantenimiento preventivo cada 10 años con un costo de 30 000 um. Calcule el importe que habrá de depositarse en un fondo que devenga una TEA de 0,06 para asegurar indefinidamente el costo del mantenimiento preventivo.

Renta perpetua vencida

23. Calcule el importe de la renta perpetua mensual vencida que se puede comprar con una inversión de 20 000 um. Esta inversión devenga una TEA de 0,1 con pago mensual de intereses.

24. El valor presente de una perpetuidad compuesta de rentas mensuales vencidas es 10 000 um. Calcule el importe de cada renta si la perpetuidad devenga una TEA de 0,2.

25. Con una TEA de 0,12, convierta una renta perpetua vencida mensual de 1 000 um en una renta uniforme mensual vencida para un horizonte temporal de 20 meses.

Renta perpetua anticipada

26. Calcule el importe de la renta perpetua anticipada mensual que puede adquirirse con un capital de 25 000 um que devenga una TEA de 0,06.

27. Con una TEA de 0,08, convierta una renta perpetua anticipada mensual de 1 000 um, en una renta uniforme bimestral vencida para un horizonte temporal de 3 años y 4 meses.

Cálculo de i (TIR) en una perpetuidad

28. Calcule la TEA aplicada a una perpetuidad cuyas rentas mensuales vencidas son 100 um y su valor presente es 8 000 um.

29. Calcule la TEA que debe aplicarse a un capital inicial de 10 000 um para que rinda una renta perpetua trimestral anticipada de 300 um.

Costo capitalizado

30. Una carretera tiene un costo de construcción de 40 000 um y su mantenimiento integral debe efectuarse cada 5 años en forma indefinida con un costo de 8 000 um. Calcule su costo capitalizado con una TEA de 0,08.

31. Un camino de herradura que tiene una vida útil estimada de 10 años se ha construido con una inversión de 30 000 um. Después de este intervalo de tiempo debe efectuarse un mantenimiento integral cuyo costo será de 15 000 um. Calcule su costo capitalizado si los mantenimientos preventivos se efectuarán durante un plazo indefinido y el costo de oportunidad es una TEM de 0,01.

32. Una entidad gubernamental que debe construir un puente para unir dos ciudades ha recibido las siguientes propuestas:

    a. Puente de madera, con un costo inicial de 10 000 um y un costo de mantenimiento cada 3 años de 4 000 um.
    b. Puente de concreto, con un costo de 20 000 um y un costo de mantenimiento cada 6 años de 6 000 um.

    Calcule el costo capitalizado de ambas alternativas con un costo de capital que es una TEA de 0,06.

33. Una fundición necesita construir un almacén cuyo techo de tijerales de madera tiene un costo inicial de 90 000 um, el cual necesita un tratamiento antipolilla cada 5 años con un costo de 30 000 um. Alternativamente, el costo inicial de los tijerales de fierro con una vida útil de 15 años tiene el mismo costo capitalizado que los tijerales de madera; se sabe además que sus costos de remplazos futuros serán iguales a su costo inicial. ¿Cuánto será la inversión inicial de la segunda alternativa (tijerales de fierro) para cubrir su costo inicial y el de sus infinitos remplazos? Considere una TEA de 0,08.

Costo capitalizado cuando F es igual a W

34. Una obra de irrigación con una vida útil de 15 años tiene un costo de 50 000 um. Después de este período de tiempo debe renovarse íntegramente con el mismo costo original cuya vida útil será también de 15 años y así sucesivamente por tiempo indefinido. Calcule el costo capitalizado con una TNA de 0,24 capitalizable trimestralmente.

35. Las fuerzas armadas de un determinado país deben renovar periódicamente 4 000 pares de calzado de campaña para su personal de tropa. En el proceso de adquisición del calzado se reciben las siguientes propuestas:
    a. Modelo C a un precio de 50 um y una vida útil de 1,5 años.
    b. Modelo D a un precio de 60 um y una vida útil de 2 años.

    Calcule el costo capitalizado de ambas alternativas con una TEA de 0,09; se asume que los costos de los calzados no cambiarán en el futuro.

36. Calcule el costo capitalizado de un camión para transporte de minerales cuyo costo original es 80 000 um, su vida útil es 6 años y sus remplazos futuros tendrán el mismo costo que el original. Aplique una TEA de 0,1.

37. Una empresa de transportes que requiere renovar su flota recibe las siguientes propuestas:
    a. 80 000 um por cada unidad que tiene una vida útil de 5 años.
    b. 100 000 um por cada unidad que tiene una vida útil de 7 años.

    Calcule el costo capitalizado de cada alternativa, considere que las futuras renovaciones de ambas alternativas tendrán el mismo costo y los activos la misma vida útil. Evalúe el costo capitalizado con una TEA de 0,08.

Resumen del capítulo

Una perpetuidad es una anualidad cuyo horizonte temporal tiende a infinito. Son ejemplos de perpetuidades: los dividendos que otorgan las sociedades anónimas por sus acciones, los fondos de amortización para reemplazar activos en los proyectos de infraestructura (hidroeléctricas, irrigaciones, etc.). De modo similar a las anualidades ciertas, las perpetuidades pueden ser: vencidas, anticipadas, diferidas vencidas y diferidas anticipadas.

El monto de una perpetuidad tiende a infinito, por lo tanto en operaciones financieras no se calcula el monto de una perpetuidad.

El valor presente de rentas perpetuas vencidas, anticipadas y diferidas, se halla al descontarlas desde su fecha futura hasta el inicio del horizonte temporal, con una tasa de interés. Del mismo modo puede hallarse el valor presente de rentas perpetuas vencidas que crecen una tasa uniforme g.

Una renta perpetua vencida es el interés producido en un período de tiempo por una cantidad P donde el número períodos es una cantidad no determinada. Para el cálculo de una renta perpetua anticipada se remplaza la renta anticipada por su equivalente vencida multiplicada por $(1+i)$.

La tasa interna de retorno de una perpetuidad se calcula despejando la variable i de las fórmulas de la perpetuidad ya sea su valor presente o de su renta uniforme.

El término capitalización es utilizado como sinónimo de valor presente de una renta perpetua, mientras el término costo capitalizado está referido al costo inicial de un activo más el valor presente de las infinitas renovaciones para poseerlo indefinidamente.

ÍNDICE TEMÁTICO

A

Anualidad anticipada, 64
Anualidad general, 126
Anualidad simple diferida, 96
Anualidades anticipadas, 63, 230
Anualidades diferidas, 95
Anualidades generales, 125
Anualidades simples con interés simple, 215
Anualidades truncas, 241
Anualidades vencidas, 17, 217

C

Cálculo de i (TIR) en una anualidad anticipada, 79
Cálculo de i (TIR) en una anualidad diferida, 106
Cálculo de i (TIR) en una anualidad simple vencida, 38
Cálculo de i (TIR) en una perpetuidad, 294
Cálculo de k y n en una anualidad simple diferida, 104
Cálculo de n e i (TIR) en una anualidad general, 139
Cálculo de n en una anualidad anticipada, 74
Cálculo de n en una anualidad vencida, 33
Clasificación de las anualidades, 9
Costo capitalizado, 295
Costo capitalizado cuando F es igual a W, 297
Cuotas variables geométricamente cada m número de rentas, 189

F

Factores de distribución y agrupamiento, 136
Factores financieros, 40
Flujos financieros y flujos de caja, 6

G

Gradientes, 163
Gradientes uniformes variables aritméticamente cada m número de rentas, 184

I

Índice temático, 311
Introducción a las anualidades, 5

J

j de una anualidad anticipada en función de P, 238
j de una anualidad anticipada en función de S, 233
j de una anualidad vencida en función de S, 221
j en una anualidad anticipada trunca en función de P, 251
j en una anualidad anticipada trunca en función de S, 245
j en una anualidad vencida en función de P, 226

M

Modelos de anualidades anticipadas con Excel, 81
Modelos de anualidades con Ex, 43
Modelos de anualidades con interés simple con Excel, 254
Modelos de anualidades de gradientes con Excel, 192
Modelos de anualidades diferidas con Excel, 108
Modelos de anualidades generales con Excel, 140
Modelos de perpetuidades con Excel, 298
Monto de una anualidad general, 128
Monto de una anualidad simple anticipada, 66
Monto de una anualidad simple diferida, 97
Monto de una anualidad simple vencida, 18
Monto de una perpetuidad, 278

N

n de una anualidad anticipada en función de S, 234
n en una anualidad anticipada en función de P, 239
n en una anualidad anticipada trunca en función de P, 252
n en una anualidad anticipada trunca en función de S, 246
n en una anualidad vencida en función de P, 228
n en una anualidad vencida en función de S, 222

P

Periodicidades de flujos y anualidades, 7
Perpetuidad, 276
Perpetuidades, 275

R

R uniforme de una anualidad en función de S, 220
R uniforme en función de P, 225
Ra uniforme de una anualidad en función de P, 237
Ra uniforme de una anualidad en función de S, 232
Ra uniforme de una anualidad trunca en función de P, 250
Ra uniforme de una anualidad trunca en función de S, 244
Renta perpetua anticipada, 293
Renta perpetua vencida, 292
Renta uniforme anticipada a partir de P, 73
Renta uniforme anticipada a partir de S, 71
Renta uniforme de anualidad de gradientes uniformes, 173
Renta uniforme diferida a partir de P, 102

Renta uniforme diferida a partir de S, 101
Renta uniforme vencida a partir de P, 30
Renta uniforme vencida a partir de S, 27
Rentas de una anualidad general, 133
Rentas uniformes anticipadas, 70
Rentas uniformes vencidas, 26

V

Valor de P de una anualidad anticipada trunca, 248
Valor de P de una anualidad con rentas uniformes vencidas, 224
Valor de P en una anualidad anticipada, 236
Valor futuro de anualidad de gradientes uniformes convencionales y desfasados, 175
Valor futuro de una anualidad con rentas que varían en progresión geométrica, 182
Valor futuro o monto final de una anualidad anticipada, 230
Valor futuro o monto final de una anualidad anticipada trunca, 241
Valor futuro o monto final de una anualidad vencida, 217
Valor presente de anualidad con rentas que varían en progresión geométrica, 178
Valor presente de anualidad de gradientes uniformes convencionales, 169
Valor presente de anualidad de gradientes uniformes desfasados, 172
Valor presente de una anualidad cuyas rentas crecen con una tasa g (i=g) y es posible determinar el número de rentas, 286
Valor presente de una anualidad general, 131
Valor presente de una anualidad simple anticipada, 68
Valor presente de una anualidad simple diferida anticipada, 100
Valor presente de una anualidad simple diferida vencida, 98
Valor presente de una anualidad simple vencida, 22
Valor presente de una perpetuidad cuyas rentas vencidas crecen con una tasa g (i > g), 283
Valor presente de una perpetuidad simple anticipada, 282
Valor presente de una perpetuidad simple anticipada cuya renta inicial es distinta de las demás, 287
Valor presente de una perpetuidad simple cuyas rentas vencidas se pagan cada cierto número de periodos de tasa, 290
Valor presente de una perpetuidad simple diferida anticipada, 289
Valor presente de una perpetuidad simple diferida vencida, 288
Valor presente de una perpetuidad simple vencida, 279